Ю. П. Петров

Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов

bhv

Юрий Петров

Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2008

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26
П30

Петров Ю. П.

П30 Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 160 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-0234-4

В книге дан анализ ошибок и неточностей, недавно обнаруженных в традиционных методах расчета и популярных пакетах прикладных программ (MATLAB, Mathcad и др.), и их связь с открытыми в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ) новыми свойствами эквивалентных (равносильных) преобразований. Эти ошибки и неточности расчетов являются причиной многих аварий и катастроф. В книге изложены пути совершенствования методов расчета и вычислительных алгоритмов для обеспечения достоверности результатов расчета, приведены многочисленные примеры.

Учебное пособие написано на основе лекций, прочитанных автором в СПбГУ на факультете прикладной математики — процессов управления.

Для студентов, аспирантов
и пользователей компьютеров, выполняющих расчеты

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26

Рецензенты:
кафедра моделирования электромеханических и компьютерных систем СПбГУ;
М. Б. Игнатьев, д. т. н., проф., лауреат государственной премии.

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Татьяна Лапина*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Корректор	*Наталия Першакова*
Дизайн обложки	*Инны Тачиной*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 20.12.07.
Формат 70×100 $^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,9.
Тираж 1500 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0234-4

Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено одной из важнейших проблем прикладной математики — проблеме достоверности и надежности компьютерных вычислений (и компьютерных технологий, надежность которых, в конечном счете, зависит от надежности вычислений) с учетом неизбежной ограниченной точности любых исходных данных.

Если исходные данные известны лишь с точностью до ±ε, то какова наименьшая достижимая погрешность решения? Вот проблема, без решения которой нельзя говорить о надежности вычислений, поскольку давно известны примеры, когда малые погрешности исходных данных приводят к большим и даже очень большим погрешностям решений.

Данная проблема неоднократно исследовалась, однако в последнее десятилетие двадцатого века в этой старой и важной проблеме открылся новый и неожиданный поворот, связанный с новыми результатами, обнаруженными в теории эквивалентных преобразований.

Было неожиданно обнаружено (см. публикации [2, 3, 4]), что привычные и широчайшим образом используемые в математике и во всех расчетах эквивалентные преобразования могут изменять корректность решаемой задачи, а значит — и достоверность ее решения. Было также обнаружено, что привычное и общепризнанное разделение всех задач математики, физики и техники на корректные и некорректные — недостаточно, что существует третий класс — класс задач, меняющих свою корректность в ходе эквивалентных преобразований, использованных при их решении.

Эти неожиданно обнаруженные результаты, полученные в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ), заставили по-новому взглянуть на старую проблему достоверности и надежности вычислений. Если раньше спокойно применяли эквивалентные преобразования, то теперь надо проверить — изменили они корректность решаемой задачи или не изменили. Если раньше считали достаточным проверить корректность решаемой задачи при ее постановке, то теперь выявилась необходимость проверки — не относится ли задача к третьему классу, не меняется ли ее корректность в ходе решения.

Встречи с задачами, относящимися к третьему классу, не раз становились причиной ошибок в вычислениях, которые затем становились причиной аварий и катастроф. Примеры аварий и катастроф, порожденных ошибками расчета при встречах с задачами третьего класса, описаны в монографии [4]. Для избежания ошибок в расчетах, для уменьшения вероятности аварий и катастроф необходимо дополнить традиционные методы вычислений проверками возможных изменений корректности и обусловленности решаемых задач при эквивалентных преобразованиях, используемых в ходе решения. Методы подобных проверок были частично описаны в [4, 11], а более подробно рассматриваются в настоящем издании.

Разумеется, новые проверки требуют дополнительного труда и "осложняют жизнь" математику, инженеру и пользователю компьютера. Поэтому они не всегда были встречены с радостью, а некоторые математики и инженеры пытались даже поставить под сомнение их необходимость. Однако дополнительные проверки необходимы, поскольку они повышают надежность и достоверность вычислений, не говоря уже о том, что новые результаты позволили выявить источники ошибок в расчетах, которые ранее неоднократно становились причинами аварий и даже катастроф.

Таким образом, в предлагаемом вниманию читателя учебном пособии изложены новые научные результаты, полученные в СПбГУ и поднимающие науку на новый уровень.

Учебное пособие состоит из двух частей. В первой части (главы с первой по четвертую) рассмотрены ошибки в расчетах, возникающие там, где не учитывали возможность изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, и описаны методы, позволяющие избегать ошибок.

Во второй части рассмотрены более сложные вопросы обеспечения надежности компьютерных вычислений, а также приведены примеры и задачи.

Учебное пособие написано на основе лекций, прочитанных автором в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ), на факультете прикладной математики — процессов управления.

Автор благодарен И. А. Петрову за помощь в подготовке рукописи.

Вопросы и замечания можно посылать на e-mail: **petrov1930@mail.ru**.

Часть I

Глава 1. Простые примеры и первые выводы

§1. Первый пример

Перед тем как перейти к исследованию проблемы надежности компьютерных вычислений в общем случае, рассмотрим предварительно несколько простых примеров, проясняющих суть дела.

Начнем с рассмотрения системы двух линейных дифференциальных уравнений (где $D = \dfrac{d}{dt}$)

$$(1{,}03D^2 + 2D + 1)x_1 + Dx_2 = 0; \qquad (1)$$

$$Dx_1 + x_2 = 0, \qquad (2)$$

для которой требуется вычислить значение $x_1(t)$ при $t = 1$.

Как хорошо известно из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [1], система (1)—(2) имеет характеристический полином, равный определителю

$$\det = \begin{vmatrix} 1{,}03\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0{,}03\lambda^2 + 2\lambda + 1 \qquad (3)$$

с двумя корнями: $\lambda_1 = -0{,}5038$, $\lambda_2 = -66{,}1629$ (с точностью до четырех знаков после запятой).

Общее решение системы (1)—(2) имеет вид

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (4)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Пусть эти условия таковы, что $C_1 = 1$; $C_2 = 1$. Пользуясь формулой (4), нетрудно вычислить значение $x_1(t)$ для любого t. В частности, для $t = 1$ будем иметь $x_1(1) = 0{,}6042$.

Теперь поставим вопрос: будет ли вычисленное значение надежным и достоверным, если некоторые коэффициенты системы (1)—(2) и, в частности, коэффициенты при D^2x_1 и Dx_2 в уравнении (1) и коэффициент при Dx_1 в уравнении (2) известны лишь с точностью до одной сотой? Для ответа на этот вопрос нам достаточно найти решения семейства уравнений

$$[1{,}03(1 + \varepsilon_1)D^2 + 2D + 1]x_1 + (1 + \varepsilon_2)Dx_2 = 0; \qquad (5)$$

$$(1 + \varepsilon_3)Dx_1 + x_2 = 0 \qquad (6)$$

для всех ε_1; ε_2; ε_3, удовлетворяющих неравенствам

$$-0{,}01 \le \varepsilon_1 \le +0{,}01; \qquad (7)$$

$$-0{,}01 \le \varepsilon_2 \le +0{,}01; \tag{8}$$

$$-0{,}01 \le \varepsilon_3 \le +0{,}01. \tag{9}$$

Если $\varepsilon_1 = -0{,}01$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, то, как нетрудно вычислить, характерический полином системы (5)—(6) примет вид

$$\det = \begin{vmatrix} 1{,}0197\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0{,}0197\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{10}$$

с корнями $\lambda_1 = -0{,}5025$, $\lambda_2 = -101{,}0204$ и значение $x_1(1)$ при тех же постоянных интегрирования $C_1 = C_2 = 1$ будет равно $x_1(1) = 0{,}6050$ или всего на 0,13% больше, чем при $\varepsilon_1 = 0$.

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0{,}01$, то характеристический полином системы (5)—(6) примет вид:

$$\det = \begin{vmatrix} 1{,}03(1+0{,}01)\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda(1+0{,}01) \\ \lambda(1+0{,}01) & 1 \end{vmatrix} = 0{,}0202\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{11}$$

с корнями $\lambda_1 = -0{,}50351$, $\lambda_2 = -98{,}5074$. В этом случае $x_1(1) = 0{,}6044$ или на 0,03% больше, чем при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

Это типичное, чаще всего встречающееся поведение решений: при малых изменениях коэффициентов решения изменяются мало. Однако так бывает не всегда. Если, например, $\varepsilon_1 = -0{,}01$, а $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0{,}01$, то характеристический полином системы (5)—(6) примет вид

$$\det = -0{,}0004\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{12}$$

с корнями $\lambda_1 = -0{,}5$, $\lambda_2 = +5000{,}5$ и поэтому $x_1(1)$ станет чрезвычайно большой величиной: $x_1(1) > e^{5000}$.

Отсюда сразу следует, что решение системы уравнений (1)—(2) с учетом неточности в задании коэффициентов, определяемой неравенствами (7)—(9), практически смысла не имеет и не приносит достоверной информации об истинном поведении объекта, математической моделью которого является система (1)—(2). При некоторых, вполне возможных, комбинациях погрешностей решение системы (1)—(2) делается неустойчивым и за короткое время $x_1(t)$ может стать чрезвычайно большой величиной, не имеющей ничего общего с решением системы (1)—(2) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

Рассмотренный пример показывает также иллюзорность надежд многих пользователей компьютера на обеспечение надежности и достоверности вычислений путем "покачивания" коэффициентов, т. е. путем вычисления решений системы уравнений не только при номинальных значениях коэффициентов, но и при измененных значениях (на величину возможной погрешности) и в сторону уменьшения и в сторону увеличения. Если все результаты расчета при всех измененных значениях коэффициентов будут мало отличаться друг от друга, то это является сильным аргументом в пользу достоверности результатов расчета. Однако произвести такую проверку далеко не всегда возможно. Если точнее, то для простых систем, подобных системе (1)—(2), такая проверка "покачиванием" вполне возможна, но для более сложных систем она может занять совершенно не реальное время. Действительно, когда в системе (1)—(2) мы проверяли значения $x_1(t)$ при учете погрешностей трех коэффициентов, то нам нужно было проверить $2^3 = 8$ комбинаций сочетаний положительных и отрицательных значений погрешностей ε_1, ε_2, ε_3. При этом только одна комбинация ($\varepsilon_1 = -0{,}01$, а $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0{,}01$) соответствовала неустойчивой системе и стремительному росту $x_1(t)$ (как известно, если хотя бы один корень характеристического полинома положителен или имеет положительную вещественную часть, то система неустойчива). Остальные семь комбинаций давали успокоительные ответы. Проверить восемь комбинаций для компьютера, конечно, совсем несложно. Однако в современной технике, как правило, приходится иметь дело с системами, состоящими из значительно большего числа уравнений. Уже система седьмого порядка в нормальной форме имеет в общем случае 49 коэффициентов и для нее, следовательно, возможны 2^{49} сочетаний положительных и отрицательных погрешностей различных коэффициентов и поэтому для обеспечения достоверности путем "покачивания" необходимо провести 2^{49} вычислений корней характеристического полинома системы. Но 2^{49} больше, чем 10^{14}. Даже для компьютера с большим быстродействием такое количество вычислений затруднительно, а при увеличении числа уравнений быстро перестает быть выполнимым.

Все сказанное относится и к более простой задаче проверки устойчивости. Если нам нужно проверить устойчивость линейной системы в нормальной форме седьмого порядка, имеющей 49 не идеально точно заданных коэффициентов с погрешностями $\pm\varepsilon_1$, $\pm\varepsilon_2$, …, $\pm\varepsilon_{49}$, то для обеспечения достоверности заключения об устойчивости путем "покачивания" коэффициентов нужно провести 2^{49} вычислений характеристического полинома, что не реально.

Все сказанное не означает, естественно, что достоверность расчетов не достижима. Просто надо понимать, что обеспечение достоверности расчета при неизбежных погрешностях в исходных данных является сложной задачей. Простыми, легкими средствами ее не решить.

Для обеспечения достоверности компьютерных расчетов нужно подробно разобраться в причинах возможных ошибок, что мы и будем делать в ходе дальнейшего изложения.

Прежде всего, надо разобраться в свойствах эквивалентных (называемых также равносильными) преобразований. При этом надо разобраться как в хорошо известных свойствах этих преобразований, так и в тех свойствах, на которые долго не обращали внимания, и которые были открыты недавно в ходе исследований, выполненных в Санкт-Петербургском государственном университете (публикации [2, 3, 4, 10]).

Определение: эквивалентные (равносильные) преобразования — это преобразования, не изменяющие решений. Эквивалентность (равносильность) уравнений, неравенств и их систем означает совпадение множеств их решений (Математическая энциклопедия издания 1977 года, том 4, с. 800).

Примеры эквивалентных преобразований: умножение всех членов на число, не равное нулю, прибавление к левой и правой частям уравнения равных величин, подстановка, т. е. замена какого-либо члена уравнения на член, равный ему.

Определение показывает, что эквивалентные преобразования сохраняют неизменными решения, но совсем не обязаны сохранять некоторые ***свойства*** решений. На это обстоятельство очень долго не обращали внимания, и часто даже молчаливо считалось, что "эквивалентные преобразования ничего не меняют". На самом деле это совсем не так. Примеры эквивалентных преобразований, не изменяющих самих решений как таковых, но изменяющих их некоторые важные свойства, были приведены в [2, 3, 4, 10].

§2. Пример системы дифференциальных уравнений, не имеющей непрерывной зависимости решений от параметров

Важнейшей теоремой, лежащей в основе всех практических приложений теории дифференциальных уравнений, является теорема о непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров. Как уже упоминалось, коэффициенты дифференциальных уравнений и входящие в эти коэффициенты параметры исследуемого объекта (от которых зависят коэффициенты) известны почти всегда с ограниченной, конечной точностью. Если непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров нет, то мы не можем быть уверены в том, что неизбежные сколь угодно малые отклонения истинных значений коэффициентов от принятых в расчете не приведут к большим или даже коренным различиям между результатами расчета и реальным поведением исследуемого объекта, и тогда расчет потеряет всякий смысл.

Поэтому теорема о непрерывности зависимости решений от параметров занимает центральное место в учебниках по дифференциальным уравнениям (см., например, известный учебник [1], с. 259—272 и многие другие) и подробно в них доказывается. Так, для систем в нормальной форме (т. е. записанных в виде системы из n уравнений первого порядка):

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = f_1(x; y_1; y_2; ...; y_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m);\\
&\frac{dy_2}{dt} = f_2(x; y_1; y_2; ...; y_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dy_n}{dt} = f_n(x; y_1; y_2; ...; y_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m),
\end{aligned} \tag{13}
$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — параметры, доказано, что если функции f_i непрерывны относительно всех аргументов и ограничены, а также удовлетворяют условиям Липшица относительно функций y_i, то решения $y_i(x)$ зависят от параметров λ_i непрерывно.

Условия Липшица означают, что для любой f_i выполняется неравенство:

$$\begin{gathered}\left| f_k(x;\bar{y}_1;\bar{y}_2;\ldots;\bar{y}_n;\lambda_1;\lambda_2;\ldots;\lambda_n) - f_k(x;\bar{\bar{y}}_1;\bar{\bar{y}}_2;\ldots;\bar{\bar{y}}_n;\lambda_1;\lambda_2;\ldots;\lambda_n)\right| \le \\ \le L\cdot\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i),\end{gathered} \tag{14}$$

где L — постоянная Липшица, т. е. положительное число, которое может быть большим, не зависящее от параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Условия Липшица необременительны и для подавляющего большинства уравнений, встречающихся в приложениях, они заведомо выполняются. Поэтому иногда упоминание об условиях Липшица опускается и теорема формулируется коротко: решения дифференциальных уравнений зависят от коэффициентов и параметров непрерывно.

Теперь идет самое интересное: в учебниках по дифференциальным уравнениям эта теорема доказана для двух крайних случаев — для систем в нормальной форме (т. е. состоящих из n уравнений первого порядка) и для одного уравнения n-го порядка. Для всего многообразия промежуточных случаев, т. е. систем, состоящих из m уравнений второго порядка; систем состоящих из уравнений третьего порядка и второго и т. д. и. т. п. — для всех этих случаев теорема в учебниках ***не доказана***.

Вместо этого существует почти всеобщая уверенность в том, что для всех систем, которые можно привести с помощью эквивалентных преобразований к нормальной форме или к одному уравнению n-го порядка, решения зависят от параметров непрерывно.

Эта уверенность основана, очевидно, на следующем рассуждении: эквивалентные преобразования, как известно, решений не изменяют. У одного уравнения n-го порядка, к которому привели исходную систему, решения те же, что были у нее. А поскольку решения уравнения n-го порядка зависят (как доказано) от параметров непрерывно, то те же самые решения исходной системы, казалось бы, тоже должны зависеть от параметров непрерывно. И все же это простое рассуждение ошибочно. Покажем это на примере.

Рассмотрим систему двух уравнений с параметром m (похожую на систему (1)—(2):

$$(D^2 + 2D + 1)x_1 + mDx_2 = 0; \tag{15}$$

$$Dx_1 + x_2 = 0. \tag{16}$$

Характеристический полином системы (15)—(16) равен определителю:

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 1 & m\lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = (1-m)\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{17}$$

и имеет корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1-m}(-1 \pm \sqrt{m}). \tag{18}$$

Общее решение системы (15)—(16) имеет вид:

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{19}$$

Из формул (18) и (19) сразу следует, что критическим значением параметра m является $m = 1$. До тех пор, пока $m < 1$ и приближается к значению $m = 1$ слева, оба корня λ_1 и λ_2 остаются отрицательными. При $m \to 1$ слева будет $\lambda_1 \to -0{,}5$, а λ_2, оставаясь отрицательным, делается очень большим по абсолютной величине. Поэтому в решении (19) при m, близких к единице, член $C_2 e^{\lambda_2 t}$ для любого t будет пренебрежимо мал, и для m, близких к единице, будет $x_1(t) \approx C_1 e^{-0{,}5t}$.

Совсем по-другому будет вести себя решение (19), если $m > 1$ и приближается к значению $m = 1$ справа. В этом случае $\lambda_1 \to -0{,}5$, а $\lambda_2 \to +\infty$. В решении (19) при m, близких к $m = 1$, будет очень большой член $C_2 e^{\lambda_2 t}$, знак которого зависит от C_2. Таким образом, для любого значения времени t зависимость величины $x_1(t)$ от параметра m терпит разрыв: при $m \to 1$ слева будет $x_1(t) \to C_1 e^{-0{,}5t}$, а при $m \to 1$ справа будет $x_1(t) \to \pm\infty$.

Таким образом, мы прямым построением убедились, что существует система дифференциальных уравнений, у которой зависимость решений от параметров не является непрерывной, имеет точки разрыва. Второй пример подобной системы будет приведен в *§3*.

§3. Пример решения технической задачи проверки устойчивости

В качестве еще одного примера рассмотрим конкретную техническую задачу — исследуем систему дифференциальных уравнений, являющуюся моделью системы управления частотой вращения электродвигателя постоянного тока, работающего на механизм, у которого зависимость колебаний момента сопротивления $\varphi(t)$ от времени является стационарным случайным процессом со спектром

$$S_\varphi = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}. \tag{20}$$

Уравнение равновесия моментов на валу электродвигателя имеет вид:

$$T_M \frac{d\omega}{dt} = M_{дв} + k\omega + M_c, \tag{21}$$

где ω — частота вращения; $M_{дв}$ — вращающий момент на валу, пропорциональный току якоря и играющий роль управления; $k\omega$ — момент трения; M_c — момент сопротивления исполнительного механизма; T_M — механическая постоянная времени, численно равная времени разгона электродвигателя от нулевой частоты до номинальной.

Переходя от уравнения (21) к уравнениям "в отклонениях" от номинального режима, измеряя время t в долях от механической постоянной времени T_M и учитывая спектр (20) по общим правилам решения задач со стационарными возмущающими силами, получаем для случая $k = –2$ следующие уравнения электродвигателя:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4, \end{aligned} \tag{22}$$

где x_1 — отклонение частоты вращения от номинальной; x_2 — отклонение тока якоря от номинального значения, играющее роль управления; x_3 — отклонение момента сопротивления от его среднего значения; x_4 — производная от x_3.

Если управляющее воздействие формировать согласно известной методике аналитического конструирования регуляторов как линейную комбинацию от переменных состояния, то уравнение регулятора примем имеющим вид:

$$x_2 = -x_1 - 2\,x_3 - x_4. \tag{23}$$

В уравнении (23) коэффициенты усиления регулятора для облегчения проверки последующих выкладок выбраны округленными до целых чисел, однако в целом уравнения (22)—(23) — всего это четыре уравнения для четырех переменных x_1; x_2; x_3; x_4 — описывают вполне реальную систему управления частотой вращения.

Следует учесть также, что переменные x_3 и x_4 не могут быть использованы в регуляторе, поэтому после исключения их из уравнений (22)—(23) приходим к следующим уравнениям, связывающим переменные x_1 и x_2, т. е. регулируемую частоту и управляющее воздействие (через $D = \frac{d}{dt}$ обозначен оператор дифференцирования):

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_2; \tag{24}$$

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)x_2. \tag{25}$$

Уравнение (24) является уравнением электродвигателя как объекта управления, уравнение (25) — уравнением регулятора.

Система уравнений (24)—(25), рассматриваемая совместно, описывает замкнутую систему управления.

Характеристический полином системы (24)—(25) равен следующему определителю:

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda + 1)^2 \tag{26}$$

и имеет корни: $\lambda_1 = –3$; $\lambda_2 = \lambda_3 = –1$ (кратный корень).

Поэтому решение $x_1(t)$ имеет вид:

$$x_1(t) = C_1 e^{-3t} + (C_2 t + C_3)e^{-t}, \tag{27}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

Однако это решение изменяется коренным образом при сколь угодно малых изменениях некоторых коэффициентов системы (24)—(25). Пусть, например, коэффициент при Dx_2 в уравнении (25) равен не единице, а $(1 + \varepsilon)$, где ε — число, малое в сравнении с единицей, и система (24)—(25) приняла вид:

$$\left.\begin{aligned} &(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_2; \\ &(D^2 + 4D + 5)x_1 = [(1+\varepsilon)D + 1]x_2. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Ее характеристический полином, равный определителю

$$\begin{aligned} \det &= \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -[(1+\varepsilon)\lambda + 1] \end{vmatrix} = \\ &= -\varepsilon\lambda^4 + (1 - 4\varepsilon)\lambda^3 + (5 - 5\varepsilon)\lambda^2 + (7 - 2\varepsilon)\lambda + 3, \end{aligned} \tag{29}$$

становится полиномом четвертой степени и помимо трех корней, близких (при малых ε) к прежним значениям $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, он получает (при $\varepsilon > 0$) большой положительный корень λ_4, приближенно (при малых ε) равный $\lambda_4 \approx \frac{1}{\varepsilon}$.

Поэтому в решении $x_1(t)$ системы (28) уже при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ появится четвертый, стремительно растущий член:

$$C_4 e^{+\frac{1}{\varepsilon}t}. \tag{30}$$

Следствие: все поведение решений системы (24)—(25) изменяется коренным образом при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов. Непрерывной зависимости решений от этих коэффициентов или от параметров, от которых они зависят в системе (24)—(25), в данном случае нет.

Решения системы (24)—(25), как показывает формула (27) — устойчивы, но уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ устойчивость теряется (любопытно, что при малых $\varepsilon < 0$ устойчивость сохраняется).

Важно отметить, что всех этих важных свойств решений системы (24)—(25) мы не увидим, если эта система будет приведена к нормальной форме, к системе уравнений первого порядка. В нормальной форме система (24)—(25) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = -3x_1 - x_2 - x_3; \\ &\dot{x}_2 = x_3; \\ &\dot{x}_3 = -x_2 - 2x_3. \end{aligned} \tag{31}$$