Владимир Гостев

ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕЧЕТКИХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2011

УДК 62-55:681.515
ББК 32.965.6
Г72

Гостев В. И.

Г72 Проектирование нечетких регуляторов для систем автоматического управления. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 416 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-0696-0

Рассмотрены вопросы проектирования нечетких (работающих на базе нечеткой логики) цифровых регуляторов для систем автоматического управления. Изложен новый метод проектирования регуляторов, основанный на полученных аналитических выражениях для управляющих воздействий на выходе нечеткого регулятора при различных функциях принадлежности. Представлены принципиальные схемы нечетких регуляторов. Приведены примеры синтеза и расчета нечетких регуляторов в системах автоматического управления. Дана сравнительная оценка показателей качества, в том числе робастности, систем автоматического управления с цифровыми нечеткими, оптимальными по быстродействию регуляторами и традиционными ПИД-регуляторами при различных воздействиях на системы управления.

Для студентов, инженеров и научных работников

УДК 62-55:681.515
ББК 32.965.6

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Натальи Смирновой*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 30.12.10.
Формат 60×90 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 26.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию № 77.99.60.953.Д.005770.05.09
от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой по надзору
в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0696-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Система управления состоит из управляющего объекта (регулятора), предназначенного для осуществления управления, и объекта управления, подвергаемого управляющим воздействиям. Данная работа посвящена проектированию нечетких регуляторов, которые осуществляют процесс выработки управляющих воздействий на базе нечеткой логики. Понятие "*нечеткая логика*" введено математиком Л. А. Заде (1965 г.), который предложил теорию "*нечетких множеств*", на основе которой можно строить нечеткие аналоги всех математических понятий и создать необходимый формальный аппарат для моделирования человеческих рассуждений и человеческого способа решения задач [111, 130, 145–151]. Нечеткое множество – это совокупность элементов, относительно которых нельзя с полной определенностью утверждать – принадлежит ли тот или иной элемент данной совокупности или нет.

Теория "*нечетких множеств*" имеет дело с "*человеческими знаниями*", которые принято называть "*экспертной информацией*". Характерным для нечеткого управления является непосредственное применение качественно формулируемых экспертных знаний для генерирования управляющих воздействий на объект управления. Знания о взаимодействии нечеткого регулятора с объектом (процессом) управления представляются в форме правил вида: ЕСЛИ (исходная ситуация), ТО (ответная реакция). Такие правила соответствуют простейшей форме человеческих взаимодействий.

В теории нечетких множеств центральную роль играют понятия "*лингвистическая переменная*" (переменная, которая принимает свои значения из множества лингвистических термов), "*лингвистический терм (название)*" (нечеткое подмножество с соответствующей функцией принадлежности) и "*функция принадлежности*" $\mu(x)$. Функция $\mu(x)$ определяет степень принадлежности элемента (лингвистической переменной) x к нечеткому множеству (терму) X в форме численного значения в диапазоне [0, 1] (это численное значение называют "*степенью истинности*" лингвистической переменной). Нечеткое множество полностью описывается его функцией принадлежности. Например, представляя лингвистические термы (нечеткие подмножества) "*отрицательная*", "*положительная*", "*большая*", "*малая*" лингвистической переменной "*ошибка*" при помощи их функций принадлежности, очерчивают диапазоны изменения качественно описанной физической величины – ошибки рассогласования системы автоматического управления. Функции принадлежности лингвистических термов, как правило, перекрывают друг друга, поэтому для одной и той же лингвистической переменной эти функции могут сообщать различные "*степени истинности*" лингвистических термов, отличающиеся от нуля.

Введенное Заде понятие "*fuzzy-logic*" в переводе означает *нечеткая логика*, поэтому нечеткие регуляторы называют также *фаззи-регуляторами* (*фаззи-контроллерами*), а системы управления с нечеткими регуляторами – *фаззи-системами*. Перевод текущих значений входных переменных нечеткого регулятора в лингвистические величины истинности называют процедурой *фаззификации*.

В нечетком регуляторе на основе сформулированных правил (базы правил) типа ЕСЛИ-ТО осуществляется формирование логического решения – получение нечеткого множества в форме результирующей функции принадлежности. Определение для этой функции принадлежности количественного значения выходной лингвистической переменной – управляющего воздействия на объект управления – называют *дефаззификацией*.

Для сравнения работы нечетких и других регуляторов в системах управления в монографии рассматриваются объекты управления, которые можно описать передаточной функцией с постоянными или переменными параметрами. В качестве входных лингвистических переменных используются *ошибка системы*, *скорость изменения (первая производная) ошибки*, *ускорение (вторая производная) ошибки*, которые качественно характеризуются непрерывными на универсальном множестве и симметричными функциями принадлежности терм-множеств. Используются простейшие правила вида ЕСЛИ-ТО, которые являются нечеткими лингвистическими высказываниями в форме лингвистических переменных с противоположными термами. Правило управления нечеткого регулятора записывается для каждого терма.

Синтез нечеткого регулятора, в общих чертах, заключается в выборе функций принадлежности терм-множеств лингвистических переменных, алгоритма нечеткого вывода (логического вывода на основе нечеткой логики), оптимизации основных параметров регулятора (диапазонов изменения лингвистических переменных, формы и параметров функций принадлежности) путем минимизации выбранного критерия качества в замкнутой системе автоматического управления.

В первом разделе кратко рассмотрены особенности управления на базе нечеткой логики, описаны функциональная схема нечеткого регулятора и алгоритмы нечеткого вывода. Во втором разделе изложен процесс принятия решений на базе нечеткой логики, который является основой работы нечеткого регулятора. Материал этих разделов, в основном, базируется на работах [2–4, 6, 110, 121, 127, 128, 130].

В третьем разделе изложен новый метод проектирования нечетких регуляторов [14–16, 144], основанный на полученных аналитических выражениях для управляющих воздействий на выходе нечеткого регулятора при различных функциях принадлежности, и представлены общие функциональная и структурная схемы нечетких регуляторов, на базе которых возможна реализация нечетких регуляторов программным или аппаратным способом. Представлены принципиальные схемы нечетких регуляторов с различными функциями принадлежности. При проектировании нечетких регуляторов предложенным методом нет необходимости в использовании пакета нечеткой логики **Fuzzy Logic Toolbox** интерактивной системы **MATLAB** и процедура проектирования нечетких регуляторов упрощается. Изложены вопросы оптимизации основных параметров регуляторов путем минимизации выбранного критерия качества с целью получения оптимальных процессов в системах автоматического управления.

Дана сравнительная оценка показателей качества, в том числе робастности, систем автоматического управления с цифровыми нечеткими и оптимальными по быстродействию регуляторами, а также традиционными ПИД-регуляторами при различных воздействиях на системы управления.

Исследование систем автоматического управления проведено путем математического моделирования с использованием интерактивной среды для научных и инженерных вычислений **MATLAB** и мощным средством моделирования и исследования систем управления с обратной связью **Simulink**.

Книга рассчитана на инженерно-технических работников, занимающихся вопросами проектирования и эксплуатации систем автоматического управления, а также на студентов, аспирантов, научных работников и широкий круг специалистов в области автоматики, технической кибернетики и смежных областей науки и техники.

Раздел 1.
УПРАВЛЕНИЕ НА БАЗЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

1.1. Общие особенности управления на базе теории нечетких множеств

В настоящее время наблюдается интенсивное развитие и практическое применение нечетких систем для целей управления и регулирования многих технических объектов.

Достоинства нечеткой логики, которые явно проявляются в нечетком управлении, заключаются прежде всего в том, что нечеткая логика позволяет удачно представить мышление человека, а именно способы принятия решений человеком, и способы моделирования сложных объектов средствами естественного языка.

Естественный язык формировался в течение сотен лет не только как средство общения людей, но и как структура, отражающая объективный мир. Познание мира опирается на мышление, а мышление, в свою очередь, невозможно без определенной знаковой системы. Наиболее мощной системой такого рода и является естественный язык, который представляет окончательную, наиболее мощную и главную реализацию человеческого мышления. Он способен оперировать противоречивыми, сложными и многозначными понятиями. Логическая структура, в частности древнегреческой геометрии, была извлечена из естественного языка, во многом определив дальнейшее развитие математики и естествознания.

В ходе принятия решения человек легко овладевает ситуацией, разделяя ее на события, находит решения в сложных ситуациях путем применения для отдельных событий соответствующих правил принятия решения, на основании прошлого опыта искусно наделяет объект отличительными признаками и приходит к общему решению. Решение принимается не на основе унифицированных стоимостных критериев, а с использованием большого числа стоимостных критериев, нередко противоречащих друг другу. В случае неполной информации возможна помощь в принятии решения с использованием выводов. В нечеткое управление вводятся подобные методы принятия решений, свойственные человеку, в форме распределенных по отдельным состояниям и целям правил управления и нечетких выводов. Человек в повседневной деятельности никогда не пользуется формальным моделированием на основе математических выражений; он не ищет одного языка, описывающего все. Язык, который использует человек, – это нечеткий естественный язык. Полученная модель не является унифицированной: она либо описывает свойства фрагментов объекта, либо является набором нескольких локальных моделей, поставленных в определенные условия. Сами локальные модели не используют числовых значений. Обладая некоторой общностью, они просты для понимания на качественном уровне. При нечетком управлении по этому образцу создают модель действий оператора с помощью высказываний типа ЕСЛИ-ТО, используя обычные слова, и слова эти нечеткие. Вместо того чтобы выстраивать цепочку числовых значений, человек проводит нечеткие границы типа “малый”, “средний”, “большой” и т. п. Благодаря применению нечетких слов можно легко представить случаи с неполными данными [126].

Актуальность новой технологии – нечеткого моделирования обусловлена тенденцией увеличения сложности математических моделей реальных систем. Традиционные методы построения моделей не приводят к удовлетворительным результатам, когда исходное описание подлежащей решению проблемы заведомо является неточным и неполным. Стремление получить исчерпывающую информацию для построения математической модели сложной реальной системы часто в принципе невозможно. В этих случаях целесообразно использовать методы специально ориентированные на построение моделей, учитывающих неполноту и неточность исходных данных. Именно в таких ситуациях технология нечеткого моделирования оказывается наиболее конструктивной [119].

Можно выявить три особенности нечеткого управления [126].

Первая заключается в том, что правила нечеткого управления, будучи условными высказываниями типа ЕСЛИ-ТО, являются логическими. Использование правил осуществляется через механизм логических выводов. Логическое управление означает, что логику управления эксперта легко представить, и разнообразным предпосылкам можно поставить в соответствие некоторое действие. Для реального оборудования это не только использование при управлении полной информации в отличие от классической теории управления, но и изменение режимов управления в зависимости от условий, например, времени и значений параметров. Во многих видах реального оборудования необходимо уделять особое внимание различным режимам работы, например процедуре запуска. В этом случае для автоматизации удобно использовать нечеткое управление, поскольку можно описывать правила в форме ЕСЛИ-ТО одинаковым образом и для режима запуска, и для режима нормальной работы.

Вторая особенность – параллельное управление. Сами нечеткие методы управления существенно различаются. Традиционные методы управления – это либо классические, либо современные методы, в которых обобщенное правило управления представляется с помощью одной формулы, в то время как при нечетком управлении используется большое число частных правил. Каждое правило действует в определенной области информационного пространства, используемого при управлении. Для каждой локальной области распределенного информационного пространства целесообразно создавать отдельные правила управления. Кроме того, если имеется много регулируемых величин, для каждой из них можно создать отдельные правила управления. Аналогично, если имеется много целей управления, для каждой цели желательно создавать правила управления. Классическое управление существенно ограничивало теоретически возможные разновидности целей в связи с необходимостью представлять цель обобщенной функцией. При нечетком управлении необходимость в целевых функциях и в решении задач оптимального управления отпадает, поэтому можно успешно справляться со всем многообразием целей и даже со взаимно противоречащими целями.

Третья особенность нечеткого управления состоит в том, что появляется возможность организовать управление в форме диалога с оператором, поскольку правила управления записываются словами в виде выражений ЕСЛИ-ТО.

Исходной предпосылкой к формированию системы управления на базе теории нечетких множеств является то, что состояние сложной системы и управляющие воздействия в САУ рассматриваются как лингвистические переменные, оцениваемые качественными термами (средствами естественного языка). Каждый терм рассматривается как нечеткое множество и формализуется с помощью соответствующей функции принадлежности. Формирование управляющего воздействия осуществляется на основании определенного набора правил (лингвистические правила управления), устанавливающих средствами естественного языка связь между состоянием динамической системы и управляющим воздействием в САУ. Определение конкретного значения управляющего воздействия осуществляется путем реализации процедуры перехода от результирующей функции принадлежности, описывающей лингвистическую переменную *управляющее воздействие*, к конкретному числовому значению. В результате неточность (нечеткость) описания динамического поведения объекта компенсируется более высоким по уровню алгоритмом управления благодаря учету, в том числе и качественных признаков динамического поведения объекта управления [2].

Очевидно, что для реализации управления на базе теории нечетких множеств и нечеткой логики необходимо устройство, формирующее управляющие воздействия на объект управления – нечеткий регулятор (регулятор, работающий на базе нечеткой логики).

В некоторых источниках управление на базе теории нечетких множеств и нечеткой логики рассматривают в контексте методологии искусственного интеллекта. В работе [3] рассматривается структура интеллектуальной системы управления с нечетким регулятором. Отмечается, что основу проектирования интеллектуальных нечетких регуляторов составляет конструирование знаний с использованием методов представления и поиска знаний. Поэтому предлагается создание нечетких промышленных регуляторов осуществлять на принципах теории искусственного интеллекта.

В работе [129] нечеткие регуляторы рассматриваются как одна из базовых моделей регуляторов интеллектуальных систем управления (наряду с нейронными регуляторами и генетическими алгоритмами). При этом отмечается, что значительным ограничением практического применения регуляторов интеллектуальных систем управления является отсутствие формальных подходов, присущих теории автоматического управления, для решения задач анализа и синтеза систем управления. Тем не менее отмечается, что нечеткие регуляторы обладают наибольшими “способностями” к формализации процессов проектирования.

Существует подход, в рамках которого управление на базе теории нечетких множеств и нечеткой логики не рассматривается в контексте методологии искусственного интеллекта. В работе [124] отмечено, что существует некоторая аналогия между правилами ЕСЛИ-ТО искусственного интеллекта и нечеткой логикой. Но искусственный интеллект, отмечается далее, есть процесс обработки символов, а нечеткая логика – нет. В искусственном интеллекте нейронная сеть есть совокупность данных и выводов в виде специальных структур. Каждой входной величине назначается относительный, дискретный весовой коэффициент. Взвешенные данные точно определенным способом формируют сеть для принятия решений. В отличие от этого в нечеткой логике весовые функции непрерывно определены на множестве значений принадлежности. Во многих случаях регулятор на базе нечеткой логики способен вырабатывать решения быстрее, чем экспертная система на основе правил ЕСЛИ-ТО.

1.2. Функциональная и структурная схемы системы управления на базе нечеткой логики. Принцип работы нечеткого регулятора. Алгоритмы нечеткого вывода

Функциональная схема системы автоматического управления на базе нечеткой логики (системы управления с нечетким регулятором или системы фаззи-управления) приведена на рис. 1.1.

Схема состоит из устройства сравнения, нечеткого регулятора НР, объекта управления ОУ и цепи обратной связи.

Нечеткий регулятор (фаззи-регулятор, fuzzy-controller) включает три основных блока – блок фаззификации (fuzzyfication), блок формирования логического решения (inference) и блок дефаззификации (defuzzyfication).

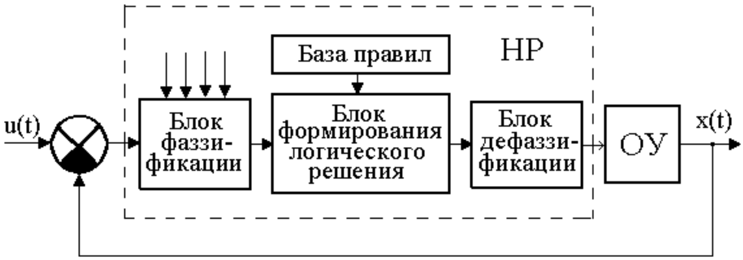

Рис. 1.1

В блоке фаззификации входные лингвистические переменные x_i, $i = \overline{1,n}$, такие как *ошибка системы* θ, *скорость изменения (первая производная) ошибки* $\dot{\theta}$, *ускорение (вторая производная) ошибки* $\ddot{\theta}$, качественно характеризуются терм-множествами (лингвистическими величинами) a_i^j, такими как *отрицательная (О), отрицательная средняя (ОС), отрицательно малая (ОМ), нулевая (Н), положительно малая (ПМ), положительно средняя (ПС), положительная (П)*, которые описываются на универсальном множестве U функциями принадлежности ФП $\mu(u)$. ФП определяет степень принадлежности каждого элемента u множеству U числом между 0 и 1, которое называют степенью истинности рассматриваемой лингвистической переменной данному терму. Диапазоны изменения входных переменных, например $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, $[\dot{\theta}_{\min}, \dot{\theta}_{\max}]$, $[\ddot{\theta}_{\min}, \ddot{\theta}_{\max}]$, и текущие значения входных переменных пересчитываются (отображаются) на единое универсальное множество $U_i = [0, L_i - 1]$, где L_i – число, соответствующее количеству термов каждой лингвистической переменной x_i, $i = \overline{1, n}$, либо на универсальное множество $U = [0,1]$. Как правило, количество термов j для каждой лингвистической переменной выбирается одним и тем же. Таким образом, для каждого текущего значения входной переменной определяется степень принадлежности (величина истинности) к тем термам (нечетким подмножествам), которые характеризуют конкретную лингвистическую переменную. Поскольку ФП обычно перекрывают друг друга, то для одной и той же входной переменной несколько ФП могут сообщать различные величины истинности, отличающиеся от нуля.

В блоке формирования логического решения на основе матрицы знаний (базы правил) записываются лингвистические правила вида ЕСЛИ (исходная ситуация), ТО (ответная реакция), которые вместе обычно называют рабочим правилом. Взаимодействие между входными и выходными ФП типа ЕСЛИ-ТО обозначается как импликация (логическая связка). Импликация (активизация) – это этап нечеткого вывода, представляющий собой процедуру нахождения степени истинности каждого из подзаключений логических правил вида ЕСЛИ-ТО, которые являются нечеткими лингвистическими высказываниями в форме лингвистических переменных. Часть ЕСЛИ (предпосылки или условия) означает сопряжение логических операций, а часть ТО (решение, вывод, заключение) обычно представляет собой простое указание лингвистической величины для выходного воздействия (управляющего воздействия на объект управления) нечеткого регулятора. Соответствующей формулировкой правил достигается результат, при котором для любой лингвистической величины управляющего воздействия, как минимум, одно из правил оказывается приемлемым. Наиболее часто используется “минимаксный” (**Max-Min Inference**) метод логического решения, когда вначале ФП части ТО каждого из правил объединяются с величиной истинности части ЕСЛИ (при этом ФП части ТО ограничивается величиной истинности части ЕСЛИ – это “мини”-операция), а затем из ограниченных ФП части ТО путем взаимного наложения выбирается результирующая ФП с максимальной величиной истинности (“макси”-операция). Эта результирующая ФП определяет собой текущее воздействие базы правил. Процедура обработки базы правил с формированием результирующей ФП представляет собой логическое решение для расчета выходной величины НР. Процесс принятия решений на базе нечеткой логики или логический нечеткий вывод описан в разделе 2.

Нечеткий вывод занимает центральное место в нечеткой логике и системах нечеткого управления. Процесс нечеткого вывода представляет собой некоторую процедуру или алгоритм получения нечетких заключений на основе нечетких условий или предпосылок с использованием понятий нечеткой логики. Этот процесс соединяет в себе все основные концепции теории нечетких множеств: функции принадлежности, лингвистические переменные, нечеткие логические операции, методы нечеткой импликации и нечеткой композиции.

Следует подчеркнуть, что как операцию импликации (логической связки), так и операцию композиции (свертки) в алгебре нечетких множеств можно реализовать по-разному (при этом итоговый результат тоже будет разным), но в любом случае общий логический вывод осуществляется за следующие четыре этапа [110].

1. *Определение нечеткости (фаззификация)*. Задаются функции принадлежности на едином универсальном пространстве для термов входных лингвистических переменных и для конкретных значений переменных определяются степени истинности каждой предпосылки каждого правила.

2. *Логический вывод*. Вычисленные значения истинности для предпосылок каждого правила применяются к заключениям (выводам) каждого правила. В качестве правил логического вывода обычно используются только операции min (минимум) или prod (умножение). В логическом выводе min функция принадлежности вывода “отсекается” по высоте, соответствующей вычисленной степени истинности предпосылки правила (нечеткая логика “И”). В логическом выводе prod функции принадлежности вывода масштабируются вычисленными величинами произведений степеней истинности предпосылок каждого правила.

3. *Композиция*. Полученные нечеткие подмножества (“усеченные по высоте” функции принадлежности) объединяются вместе для формирования одного нечеткого подмножества (результирующей функции принадлежности) для переменной вывода (решения). Для объеди-

нения обычно используются операции max (максимум) или sum (сумма). При композиции max результирующее нечеткое подмножество конструируется как поточечный максимум по всем полученным нечетким подмножествам (нечеткая логика “ИЛИ”). При композиции sum результирующее нечеткое подмножество конструируется как поточечная сумма по всем полученным нечетким подмножествам.

4. *Приведение к четкости (дефаззификация).* Нечеткий вывод преобразуется в четкое число.

В блоке дефаззификации полученная результирующая функция принадлежности для управляющего воздействия на объект управления преобразуется в числовую величину, как правило, методом определения “центра тяжести” (Centre of Gravity) плоскости S результирующей фигуры, лежащей под графиком результирующей ФП. Общее правило расчета абсциссы u_C центра тяжести $s_C = S(u_C, \mu_C)$ участка площади, охватываемой результирующей функцией $\mu_C(u)$ в пределах изменения переменной u от $u = U_1$ до $u = U_2$, определяется по формуле [110]

$$u_C = \frac{\int_{U_1}^{U_2} u\mu_C(u)du}{\int_{U_1}^{U_2} \mu_C(u)du}. \tag{1.1}$$

Центр тяжести площади называют центроидом площади. Поэтому описанный выше метод приведения к четкости называется центроидным (centroid of area). Переменная u_C– результат дефаззификации представляет собой ненормированный выход нечеткого регулятора.

Переходя к численному интегрированию по методу трапеций (с шагом дискретизации u_0), запишем формулу (1.1) в виде

$$u_c = \frac{\frac{U_1\mu_0}{2} + \sum_{i=1}^{M-1} u_i\mu_i + \frac{U_2\mu_M}{2}}{\frac{\mu_0}{2} + \sum_{i=1}^{M-1} \mu_i + \frac{\mu_M}{2}}, \tag{1.2}$$

где $(U_2 - U_1)/M = u_0$ – шаг дискретизации; M – число дискрет на интервале $U_2 - U_1$; i =1,2,3,…, M –1.

В частном случае, когда результирующая ФП является кусочно-линейной, абсцисса “центра тяжести” определяется как [130]

$$u_c = \frac{\sum_{k=1}^{N}(a_{k+1}-a_k)[(2a_{k+1}+a_k)b_{k+1}+(2a_k+a_{k+1})b_k]}{3\sum_{k=1}^{N}(a_{k+1}-a_k)(b_{k+1}+b_k)}, \qquad (1.3)$$

где N – число вершин, a_k, b_k – координаты вершин результирующей фигуры. Полученное значение u_c затем преобразуется в значение управляющего воздействия на объект управления путем обратного отображения величины u_c с единого универсального множества на диапазон изменения $[m_{\min}, m_{\max}]$ лингвистической переменной *управляющее воздействие на объект* m.

Отметим, что метод центра тяжести для одноточечных множеств (Centre of Cravity for Singletons) рассчитывается по формуле

$$u_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i \mu_c(u_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_c(u_i)}, \qquad (1.4)$$

где n – число одноточечных (одноэлементных) нечетких множеств, каждое из которых характеризует единственное значение рассматриваемой выходной лингвистической переменной.

В пакете нечеткой логики (**Fuzzy Logic Toolbox**) интерактивной системы **MATLAB** [110] даны также другие методы приведения к четкости при использовании результирующей функции принадлежности: наименьший максимум (**smallest of max, som**), наибольший максимум (**largest of max, lom**), средний максимум (**mean of max, mom**), бисекторный (**bisector of area**), которые находят, однако, менее широкое применение. Близкие к центроидному методу результаты дает бисекторный метод, в котором четкое значение u_c выходной переменной определяется из уравнения

$$\int_{U_1}^{u_c} \mu_c(u)du = \int_{u_c}^{U_2} \mu_c(u)du \qquad (1.5)$$

(биссектриса площади равна абсциссе, которая делит площадь, ограниченную результирующей функцией принадлежности, на две равные части).

На практике используется несколько алгоритмов нечеткого вывода. Кратко рассмотрим алгоритм Мамдани (предложен в 1975 г. английским математиком Ebrahim Mamdani [145, 146]), который используется в интерактивной системе MATLAB, для простоты полагая, что базу знаний организуют два нечетких правила (по числу термов) вида

$$\textbf{\textit{Если}}\ (u_1 = a_1^1)\ \textbf{\textit{и}}\ (u_2 = a_2^1),\ \textbf{\textit{то}}\ (u_c = a_c^1);$$

$$\textbf{\textit{Если}}\ (u_1 = a_1^2)\ \textbf{\textit{и}}\ (u_2 = a_2^2),\ \textbf{\textit{то}}\ (u_c = a_c^2),$$

где u_i – текущие значения входных переменных, пересчитанные на единое универсальное множество, $(i = \overline{1,2})$, a_i^j – лингвистические оценки (терм-множества, названия) входных переменных, например, $a_i^j \in \{\textit{отрицательная}(j=1), \textit{положительная}(j=2)\}$. a_c^j – лингвистическая оценка текущей выходной переменной u_c на едином универсальном множестве.

u_c^* – четкое значение выходной переменной, которое надо определить на основе приведенной информации и известных четких значений входных переменных u_1^*, u_2^*. $\mu^j(u)$ – заданные функции принадлежности для переменных $(j = \overline{1,2})$.

Алгоритм Мамдани математически описывается следующим образом.

1. *Нечеткость* (процедура *фаззификации – fuzzification*): находятся степени истинности для предпосылок или условий (входных переменных) каждого правила:

$$\mu_1(u_1^*),\ \mu_2(u_1^*),\ \mu_1(u_2^*),\ \mu_2(u_2^*),$$

где $\mu_1(u_1^*),\ \mu_2(u_1^*)$ – функции принадлежности для переменной u_1, $\mu_1(u_2^*),\ \mu_2(u_2^*)$ – функции принадлежности для переменной u_2.

2. *Нечеткий вывод*: находятся уровни “отсечения” (степени истинности) для предпосылок или условий каждого из правил (процедура *агрегирования – aggregation*):

$$\left.\begin{aligned} A &= \mu_1(u_1^*) \wedge \ \mu_1(u_2^*); \\ B &= \mu_2(u_1^*) \wedge \ \mu_2(u_2^*), \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

где через “ $\wedge$ ” обозначена операция логического минимума (min); затем находятся усеченные функции принадлежности для переменной вывода или заключения – выходной переменной u_c (процедура *активизации – activation*):

$$\left.\begin{aligned} \mu_{1c}(u) &= A \wedge \overline{\mu}_1(u); \\ \mu_{2c}(u) &= B \wedge \overline{\mu}_2(u), \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

где $\mu_{1c}(u),\ \mu_{2c}(u)$ – функции принадлежности для переменной u_c.

Выходные функции принадлежности $\overline{\mu}_1(u),\ \overline{\mu}_2(u)$ в формуле (1.7) могут совпадать, но могут быть отличными от *входных* функций принадлежности $\mu_1(u),\ \mu_2(u)$, используемых в формулах (1.6).

3. *Композиция* (процедура *аккумуляции – accumulation*): производится объединение найденных усеченных функций, в результате чего получаем итоговое нечеткое множество для переменной выхода с результирующей функцией принадлежности

$$\mu_c(u) = \mu_{1c}(u) \vee \mu_{2c}(u)\,, \tag{1.8}$$

где через “ $\vee$ ” обозначена операция логического максимума (max).

4. *Приведение к четкости* (процедура *дефаззификации – defuzzification)*: нахождение четкого значения выходной переменной u_c^*, например, центроидным методом.

Алгоритм Мамдани, использующий формулы (1.6)–(1.8), называют “минимаксным” методом нечеткого вывода. Этот алгоритм наиболее широко используется на практике. Имеется много модификаций этого алгоритма [40]. Так, в процедуре *агрегирования* вместо операции логической *конъюнкции* (**And method, min**-операция**)**, определяемой формулой (1.6), может использоваться *алгебраическое произведение* (**prod**-операция):

$$\left.\begin{aligned} A &= \mu_1(u_1^*) \times \ \mu_1(u_2^*); \\ B &= \mu_2(u_1^*) \times \ \mu_2(u_2^*). \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

В процедуре *активизации* кроме операции **min**-*активизации* (см. формулу (1.7)) может использоваться операция **prod**-*активизации*

$$\left.\begin{aligned}\mu_{1c}(u) &= A\times\mu_1(u),\\ \mu_{2c}(u) &= B\times\mu_2(u)\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

или **average**-*активизации*

$$\left.\begin{aligned}\mu_{1c}(u) &= 0.5\times[A+\mu_1(u)],\\ \mu_{2c}(u) &= 0.5\times[B+\mu_2(u)].\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

В процедуре *композиции* кроме операции логической *дизъюнкции* (**Or method, max**-операции), определяемой формулой (1.8), может использоваться *граничная сумма* (**sum**-операция)

$$\mu_c(u) = \min\{\mu_{1c}(u)+\mu_{2c}(u)\} \tag{1.12}$$

или *алгебраическая сумма* (**probor**-операция)

$$\mu_c(u) = \mu_{1c}(u)+\mu_{2c}(u)-\mu_{1c}(u)\times\mu_{2c}(u). \tag{1.13}$$

Рассмотрим другой алгоритм, для простоты полагая, что базу знаний организуют два нечетких правила (по числу термов) вида

Если $(u_1 = a_1^1)$ ***или*** $(u_2 = a_2^1)$, ***то*** $(u_c = a_c^1)$;

Если $(u_1 = a_1^2)$ ***или*** $(u_2 = a_2^2)$, ***то*** $(u_c = a_c^2)$.

Алгоритм описывается следующим образом.

1. *Нечеткость* – как в алгоритме Мамдани.

2. *Нечеткий вывод*: находятся уровни “отсечения” (степени истинности) для предпосылок или условий каждого из правил (процедура *агрегирования*):

$$\left.\begin{aligned}A &= \mu_1(u_1^*)\vee\ \mu_1(u_2^*);\\ B &= \mu_2(u_1^*)\vee\ \mu_2(u_2^*),\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

где через “$\vee$” обозначена операция логического максимума (max); затем находятся усеченные функции принадлежности для переменной вывода или заключения – выходной переменной u_c (процедура **min**-*активизации* по формуле (1.7) как в алгоритме Мамдани или **prod**-*активизации* по формуле (1.10)).

3. *Композиция*: результирующая функция принадлежности определяется как в алгоритме Мамдани по формуле (1.8).

4. *Приведение к четкости*: находятся границы $u_{c\max 1}$ и $u_{c\max 2}$ наибольшего из максимумов max[A,B] результирующей функции принадлежности и определяется четкое значение выходной переменной u_c^* методом среднего максимума (mean of max, mom):

$$u_c^* = \frac{u_{c\max 1} + u_{c\max 2}}{2}. \tag{1.15}$$

Отметим, что в процедуре *агрегирования* вместо операции логической *дизъюнкции* (**Or method, max**-операции), определяемой формулой (1.14), может использоваться *алгебраическая сумма* (**probor**-операция):

$$\left.\begin{aligned} A &= \mu_1(u_1^*) + \mu_1(u_2^*) - \mu_1(u_1^*) \times \mu_1(u_2^*); \\ B &= \mu_2(u_1^*) + \mu_2(u_2^*) - \mu_2(u_1^*) \times \mu_2(u_2^*). \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

В алгоритме Сугено (Sugeno [231]) 0-го порядка в интерактивной системе **MATLAB** используется набор правил в следующей форме:

$$\textbf{\textit{Если}}\ (u_1 = a_1^1)\ \textbf{\textit{и}}\ (u_2 = a_2^1),\ \textbf{\textit{то}}\ (u_c = c_1);$$

$$\textbf{\textit{Если}}\ (u_1 = a_1^2)\ \textbf{\textit{и}}\ (u_2 = a_2^2),\ \textbf{\textit{то}}\ (u_c = c_2),$$

где c_1 и c_2 – четкие значения индивидуальных выводов или заключений правил (некоторые действительные числа).

Алгоритм описывается следующим образом.

1. *Нечеткость* – как в алгоритме Мамдани.

2. *Нечеткий вывод*: находятся уровни “отсечения” (степени истинности) для предпосылок или условий каждого из правил:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \mu_1(u_1^*) \wedge \mu_1(u_2^*) \\ A_2 &= \mu_2(u_1^*) \wedge \mu_2(u_2^*) \end{aligned}\right\}, \tag{1.17}$$

где через “$\wedge$” обозначена операция логического минимума (min); но далее определяются индивидуальные выводы правил:

$$u_{c1}^* = c_1,\ u_{c2}^* = c_2. \tag{1.18}$$

3. *Приведение к четкости*: четкое значение переменной выхода определяется по формуле

$$u_c^* = \frac{A_1 u_{c1}^* + A_2 u_{c2}^*}{A_1 + A_2} = \frac{\sum_{i=1}^{2} c_i A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i}, \tag{1.19}$$

где c_i – четкие значения индивидуальных выводов или заключений правил (некоторые действительные числа), а A_i – степени истинности для предпосылок или условий каждого из правил, т. е. используется модифицированный вариант в форме метода центра тяжести для одноточечных множеств (1.4).

При дефаззификации в алгоритме нечеткого вывода Сугено кроме метода взвешенного среднего **wtaver** (weighted average), определяемого формулами (1.4) или (1.19), может использоваться метод взвешенной суммы **wtsum** (weighted sum).

Отметим, что в процедуре *агрегирования* вместо операции логической *конъюнкции* (**And method, min**-операция**)**, определяемой формулой (1.17), может использоваться *алгебраическое произведение* (**prod**-операция):

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \mu_1(u_1^*)\times\ \mu_1(u_2^*); \\ A_2 &= \mu_2(u_1^*)\times\ \mu_2(u_2^*). \end{aligned}\right\} \qquad (1.20)$$

В алгоритме Сугено (Sugeno) 1-го порядка используется набор правил в следующей форме

$$\textbf{\textit{Если}}\ (u_1 = a_1^1)\ \textbf{\textit{и}}\ (u_2 = a_2^1),\ \textbf{\textit{то}}\ (u_c = a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1);$$

$$\textbf{\textit{Если}}\ (u_1 = a_1^2)\ \textbf{\textit{и}}\ (u_2 = a_2^2),\ \textbf{\textit{то}}\ (u_c = a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2),$$

а индивидуальные выводы или заключения правил определяются как

$$u_{c1}^* = a_1 u_1^* + b_1 u_2^* + c_1;$$

$$u_{c2}^* = a_2 u_1^* + b_2 u_2^* + c_2.$$

Здесь a_i, b_i – некоторые весовые коэффициенты.

В алгоритме нечеткого вывода Мамдани основными этапами являются: формирование базы правил, фаззификация входных переменных, агрегирование подусловий в нечетких правилах, активизация подзаключений и аккумуляция (композиция) заключений нечетких правил. В алгоритме нечеткого вывода Сугено аккумуляция фактически отсутствует, поскольку расчеты осуществляются с обычными действительными числами.

К настоящему времени предложено несколько других алгоритмов нечеткого вывода. Так, в работе [119] описаны алгоритмы нечеткого вывода Цукамото (Tsukamoto) и Ларсена (Larsen). Однако в большинстве практических случаев вполне достаточно использовать только алгоритмы нечеткого вывода Мамдани или Сугено [147].

В данной работе проектирование нечетких регуляторов выполнено на основе нечеткого вывода Мамдани с использованием “минимаксного” метода логического решения (**Max-Min Inference**).

Нечеткий регулятор НР практически реализуется на микроЭВМ (или микропроцессоре) и работает в дискретном режиме, поэтому система автоматического управления с нечетким регулятором содержит устройства сопряжения микроЭВМ с объектом управления – аналого-цифровой преобразователь АЦП и цифроаналоговый преобразователь ЦАП (см. рис. 1.2, на котором представлена структурная схема системы управления с нечетким регулятором).

АЦП квантует непрерывную ошибку $\theta(t) = u(t) - x(t)$ с шагом квантования h. В качестве первой и второй производных от ошибки обычно вычисляют первую и вторую разность по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\theta}(k) &= [\theta(k) - \theta(k-1)]/h; \\ \ddot{\theta}(k) &= [\dot{\theta}(k) - \dot{\theta}(k-1)]/h = [\theta(k) - 2\theta(k-1) + \theta(k-2)]/h^2, \end{aligned}\right\} \quad (1.21)$$

где $\theta(k)$ – квантованная ошибка на выходе АЦП. ЦАП представляет собой, как правило, фиксатор нулевого порядка с передаточной функцией $H(s) = (1 - e^{-hs})/s$.

Как отмечалось, нечеткий регулятор НР (см. рис. 1.2) содержит блоки фаззификации, формирования логического решения и дефаззификации (см. рис. 1.1), но часто АЦП, блоки оценки первой и второй разностей от квантованной ошибки и ЦАП также включают в схему нечеткого регулятора.

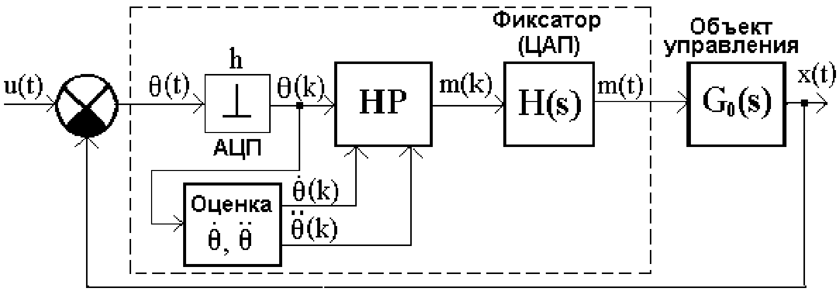

Рис. 1.2

Отметим некоторые особенности нечеткого регулятора. НР работает в дискретном режиме, поэтому на каждом шаге квантования h он должен выполнить все необходимые вычисления. НР обрабатывает все входные переменные, поэтому на него можно подавать дополнительные переменные, характеризующие процессы в объекте управления, и тем самым обеспечивать более широкое воздействие на динамику управления. Система с НР обычно устойчива в отношении изменений параметров объекта управления, что связано с нечеткой природой правил функционирования. Традиционные методы описания регуляторов, например при помощи передаточных функций, для НР не подходят и не требуются. НР является нелинейным и его особенностью является отсутствие динамики в самом НР. Отсутствие "памяти" и процедура проектирования, а также словесное описание процесса управления, характеризующееся лингвистическими правилами, являются главными особенностями НР.

Нечеткие регуляторы реализуются на практике, как правило, в форме программного обеспечения высокого уровня, например "Pascal", что обеспечивает большую гибкость при их настройке. При этом по результатам моделирования и испытаний системы управления, содержащей нечеткий регулятор в замкнутом контуре, можно изменять количественные диапазоны лингвистических переменных, функции принадлежности и модифицировать базу правил с целью получения требуемого качества управления.

Нечеткие регуляторы представляют интерес в первую очередь для управления объектами, которые или не поддаются, или поддаются с большими трудностями формализованному описанию, но даже применительно к управлению объектами, для которых получены математические модели, эти регуляторы часто предпочтительнее других, так как позволяют получить более высокое качество (меньшие ошибки в переходных и установившихся режимах и высокое быстродействие) систем автоматического управления.

Поскольку алгоритмы управления на базе нечеткой логики могут быть реализованы только с использованием ЭВМ, то система автоматического управления с нечетким регулятором является цифровой. Важнейшей характеристикой цифровой системы управления является шаг квантования мгновенного ключа h (интервал дискретизации аналогового сигнала). Значение h во многом определяет значения других параметров цифровой системы автоматического управления, в частности параметров традиционных цифровых регуляторов. Поэтому при проектировании систем управления с нечеткими регуляторами необходимо уделять внимание выбору значения шага квантования h.

Раздел 2.
ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА БАЗЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Процесс принятия решения в системе с одним выходным и n входными параметрами

Основным понятием нечеткой логики является нечеткое множество. Пусть $X = \{x\}$ – универсальное множество, т. е. полное множество, охватывающее всю проблемную область. Нечеткое множество $A \subseteq X$, по определению, представляет собой набор пар $\{(x, \mu^A(x))\}$, где $x \in X$ и $\mu^A : X \to [0,1]$ – функция принадлежности, которая представляет собой некоторую субъективную меру соответствия элемента x нечеткому множеству A [4, 127].

$\mu^A(x)$ может принимать значения от нуля, который обозначает абсолютную непринадлежность, до единицы, которая говорит об абсолютной принадлежности элемента x нечеткому множеству A. Иногда удобно рассматривать значение $\mu^A(x)$ как степень совместимости элемента x с нечетким понятием, представленным нечетким множеством A.

Часто нечеткое множество $A \subseteq X$ и его функцию принадлежности $\mu^A(x)$ рассматривают как взаимозаменяемые понятия.

Если множество $[0,1]$ заменить $\{0,1\}$, то функция принадлежности представляет собой характеристическую функцию обыкновенного (не нечеткого) множества.

Если нечеткое множество A определено на конечном универсальном множестве $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, то его удобно обозначать следующим образом:

$$A = \mu^A(x_1)/x_1 + \mu^A(x_2)/x_2 + ... + \mu^A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu^A(x_i)/x_i ,$$

где $\mu^A(x_i)/x_i$ – пара “функция принадлежности / элемент”, называемая “синглтоном” , а “+” обозначает совокупность пар.

В случае непрерывного множества X используется следующее обозначение:

$$A = \int_X \mu^A(x) / x .$$

Знак $\int$ обозначает здесь совокупность пар $\mu^A(x) / x$.

Отметим основные свойства нечетких множеств:

1. Нечеткое множество $A \subseteq X$ пустое, т. е. $A = \varnothing$, если $\mu^A(x) = 0, \forall x \in X$.

2. Нечеткие множества A и $B \subseteq X$ эквивалентны, т. е. $A = B$, если $\mu^A(x) = \mu^B(x), \forall x \in X$.

3. Нечеткое множество $A \subseteq X$ является подмножеством нечеткого множества $B \subseteq X$, т. е. $A \subseteq B$, если $\mu^A(x) \le \mu^B(x), \forall x \in X$.

Наиболее распространенные операции над нечеткими множествами, которые будут использованы в дальнейшем, следующие.

1. Дополнением нечеткого множества A называется нечеткое множество $\neg A$, функция принадлежности которого равна:

$$\mu^{\neg A}(x) = 1 - \mu^A(x), \forall x \in X .$$

2. Пересечением двух нечетких множеств A и $B \subseteq X$ называется нечеткое множество $A \cap B$, функция принадлежности которого равна:

$$\mu^{A \cap B}(x) = \mu^A(x) \wedge \mu^B(x), \forall x \in X ,$$

где $\wedge$ – знак операции минимума.

3. Объединением двух нечетких множеств A и $B \subseteq X$ называется нечеткое множество $A \cup B$, функция принадлежности которого равна:

$$\mu^{A \cup B}(x) = \mu^A(x) \vee \mu^B(x), \forall x \in X ,$$

где $\vee$ – знак операции максимума.

Рассмотрим процесс принятия решения в системе с одним выходным параметром (решением, выводом или следствием) и n входными параметрами (причинами или условиями). Введем основные формализмы для определения матрицы нечетких баз знаний (носителя экспертной информации, на базе которой разрабатываются модели и алгоритмы для принятия решения). Идея, лежащая в основе формализации причинно-следственных связей между параметрами (переменными *входы – выход*), состоит в описании этих связей на естественном языке с применением теории нечетких множеств и лингвистических переменных [127, 128].

Обозначим: d – выходной параметр, $x_1, x_2, ..., x_n$ – входные параметры. Очевидно, что

$$d = f_d(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{2.1}$$

где f_d – некоторая функция, устанавливающая связь между переменными x_i и d, причем выходной и входные параметры (переменные) могут быть как количественные, так и качественные.

Области изменения количественных параметров определим в виде диапазонов:

$$U_i = [x_{нi}, x_{вi}], \; i = \overline{1,n} \; ; \tag{2.2}$$

$$W = [d_н, d_в], \tag{2.3}$$

где $x_{нi}$ $(x_{вi})$ – нижнее (верхнее) значение входного параметра (переменной) x_i, $d_н(d_в)$ – нижнее (верхнее) значение выходного параметра (переменной) d.

Дискретные множества всех возможных значений качественных параметров (переменных) определим так:

$$U_i = \{v_i^1, v_i^2, ..., v_i^{q_i}\}, i = \overline{1,n}; \tag{2.4}$$

$$W = \{w^1, w^2, ..., w^{q_m}\}, \tag{2.5}$$

где v_i^1($v_i^{q_i}$)– балльная оценка, соответствующая наименьшему (наибольшему) значению входного параметра x_i; $w^1(w^{q_m})$ – балльная оценка, соответствующая наименьшему (наибольшему) значению выходного параметра d; $q_i, i = \overline{1,n}$ и q_m– так называемые мощности множеств (2.4) и (2.5).

Допустим, что $X^* = \left| x_1^*, x_2^*, ... x_n^* \right|$ – вектор конкретных (фиксированных) входных параметров (переменных), где $x_i^* \in U_i$, $i = \overline{1,n}$. Задача принятия решения состоит в том, чтобы на основе информации о векторе $X^* = \left| x_1^*, x_2^*, ... x_n^* \right|$ определить решение (вывод) $d^* \in W$. Необходимым условием решения такой задачи является наличие зависимости (2.1). Допустим, что входные и выходной параметры представляют собой лингвистические переменные, заданные на универсальных множествах (2.2), (2.3) или (2.4), (2.5). Лингвистической переменной (ЛП) называется переменная, значениями которой являются слова или предложения естественного языка, т. е. качественные термы (терм – от англ. Term – называть). Используя понятие функции принадлежности (ФП), каждый из лингвистических термов можно формализовать в виде нечеткого множества, заданного на соответствующем универсальном множестве.

Для оценки лингвистических переменных будем использовать качественные термы из следующих терм-множеств:

$A_i = \{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^{L_i}\}$ – терм-множество переменной $x_i, i = \overline{1, n}$;

$D = \{d_1, d_2, ..., d_m\}$ – терм-множество переменной d,

где a_i^p – p-й лингвистический терм параметра $x_i = \overline{1, L_i}, i = \overline{1, n}$;

d_j–j-й лингвистический терм параметра (переменной) d, совпадающий с названием j-го решения; m – число различных решений. Мощности терм-множеств A_i в общем случае различны. Названия отдельных термов $a_i^1, a_i^2, ..., a_i^{L_i}$ могут также отличаться друг от друга для различных лингвистических переменных. Например, лингвистические переменные *скорость* характеризуется термами {низкая, средняя, высокая, очень высокая}, *частота* характеризуется термами {замедленная, нормальная, ускоренная}.

Лингвистические термы $a_i^p \in A_i$ и $d_j \in D$, $p = \overline{1, L_i}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ рассматриваем как нечеткие множества, заданные на универсальных множествах, определяемых соотношениями (2.2)–(2.5).

В случае количественных параметров (переменных) $x_i, i = \overline{1, n}$ и d нечеткие множества $a_i^p \in A_i$ и $d_j \in D$ определим соотношениями:

$$a_i^p = \int_{x_{нi}}^{x_{вi}} \mu^{a_i^p}(x_i) / x_i; \tag{2.6}$$

$$d_j = \int_{d_н}^{d_в} \mu^{d_j}(d)/d\,, \qquad (2.7)$$

где $\mu^{a_i^p}(x_i)$ – функция принадлежности значения входного параметра $x_i \in [x_{нi}, x_{вi}]$ терму $a_i^p \in A_i$, $p=\overline{1,L_i}$, $i=\overline{1,n}$, а $\mu^{d_j}(d)$ – функция принадлежности значения выходного параметра $d \in [d_н, d_в]$ терму-решению $d_j \in D$, $j=\overline{1,m}$.

В случае качественных параметров $x_i, i=\overline{1,n}$ и d нечеткие множества $a_i^p \in A_i$ и $d_j \in D$ определим соотношениями:

$$a_i^p = \sum_{k=1}^{q_i} \mu^{a_i^p}(v_i^k)/v_i^k\,; \qquad (2.8)$$

$$d_j = \sum_{r=1}^{q_m} \mu^{d_j}(w^r)/w^r\,, \qquad (2.9)$$

где $\mu^{a_i^p}(v_i^k)$ – степень принадлежности элемента $v_i^k \in U_i$ терму $a_i^p \in A_i$, $p=\overline{1,L_i}$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,q_i}$; $\mu^{d_j}(w^r)$ – степень принадлежности элемента $w^r \in W$ терму-решению $d_j \in D$, $j=\overline{1,m}$.

Отметим, что знаки интеграла и суммы в соотношениях (2.6)–(2.9) обозначают не что иное, как объединение пар вида $\mu(u)/u$.

Этап, на котором определяются лингвистические оценки переменных и их функции принадлежности, называют *фаззификацией*.

Рассмотрим $N = k_1 + k_2 + ... + k_m$ ситуаций (условий или экспериментальных данных), где k_j – число ситуаций (условий) с решением $d_j \in D$, $j=\overline{1,m}$, m – число решений. Пронумеруем ситуации (условия) следующим образом:

$11,\ 12, ...,\ 1k_1$ – номера ситуаций (комбинаций входных переменных) с решением d_1;

$21,\ 22, ...,\ 2k_2$ – номера ситуаций с решением d_2;

…………………………………………………………

$j1,\ j2,...,\ jk_j$ – номера ситуаций с решением d_j;

…………………………………………………….

$m1,\ m2,...,\ mk_m$ – номера ситуаций с решением d_m.

Сформируем таблицу – ***матрицу знаний***, используя следующие правила:

1. Размерность матрицы $(n+1)\times N$, где $(n+1)$ – число столбцов, N – число строк.

2. Первые n-столбцов матрицы соответствуют входным параметрам (переменным) $x_i, i=\overline{1,n}$, а $(n+1)$-й столбец – решениям (значениям выходной переменной) d_j, $j=\overline{1,m}$.

3. Первые k_1 строк соответствуют решению d_1, вторые k_2 строк – решению d_2, …., последние k_m строк – решению d_m. Таким образом, каждая строка матрицы представляет некоторую комбинацию значений входных переменных, отнесенную экспертом к одному из возможных решений (к одному из возможных значений выходной переменной).

4. Элемент a_i^{jp}, стоящий на пересечении i-го столбца и jp-й строки соответствует лингвистической оценке параметра $x_i, i=\overline{1,n}$ в ситуации с номером jp, $j=\overline{1,m}$, $p=\overline{1,k_j}$. При этом лингвистические оценки a_i^{jp} выбираются из терм-множества переменной x_i, определенного выше, т. е. $a_i^{jp}\in\{a_i^1,a_i^2,...,a_i^{L_i}\}$.

Полученная ***матрица знаний*** определяет систему логических высказываний типа ***если-то, иначе***, связывающих значения входных параметров (переменных) $x_i, i=\overline{1,n}$ с одним из решений d_j, $j=\overline{1,m}$, а именно:

Если ($x_1=a_1^{11}$) ***и*** ($x_2=a_2^{11}$)…***и*** ($x_n=a_n^{11}$) ***или***

($x_1=a_1^{12}$) ***и*** ($x_2=a_2^{12}$)…***и*** ($x_n=a_n^{12}$) ***или …***

($x_1=a_1^{1k_1}$) ***и*** ($x_2=a_2^{1k_1}$)…***и*** ($x_n=a_n^{1k_1}$), ***то*** $d=d_1$, ***иначе***

Если ($x_1=a_1^{21}$) ***и*** ($x_2=a_2^{21}$)…***и*** ($x_n=a_n^{21}$) ***или***

$(x_1 = a_1^{22})$ ***и*** $(x_2 = a_2^{22})\ldots$***и*** $(x_n = a_n^{22})$ ***или …***

$(x_1 = a_1^{2k_2})$***и*** $(x_2 = a_2^{2k_2})\ldots$***и*** $(x_n = a_n^{2k_2})$***, то*** $d = d_2$ ***, иначе***

……………………………………………………………………

Если $(x_1 = a_1^{m1})$ ***и*** $(x_2 = a_2^{m1})\ldots$***и*** $(x_n = a_n^{m1})$ ***или***

$(x_1 = a_1^{m2})$ ***и*** $(x_2 = a_2^{m2})\ldots$***и*** $(x_n = a_n^{m2})$ ***или …***

$(x_1 = a_1^{mk_m})$ ***и*** $(x_2 = a_2^{mk_m})\ldots$***и*** $(x_n = a_n^{mk_m})$***, то*** $d = d_m$.

С использованием символов операций $\bigcup$ (***или***) и $\bigcap$ (***и***) записанная система высказываний может быть переписана в компактной форме:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j}[\bigcap_{i=1}^{n}(x_i = a_i^{jp})] \to d_j, \quad j = \overline{1,m}. \qquad (2.10)$$

Таким образом, искомое соотношение (2.1), устанавливающее связь между входными (ситуациями, условиями) и выходным (решением) параметрами (переменными), формализовано в виде системы нечетких логических высказываний (2.10), которая базируется на ***матрице знаний***. Систему нечетких логических высказываний (2.10) называют ***нечеткой базой знаний***.

Рассмотрим метод разработки алгоритма принятия решения, позволяющий фиксированному вектору *количественных* входных параметров (переменных) $X^* = \left|x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*\right|$, $x_i^* \in [x_{нi}, x_{вi}]$ поставить в соответствие решение $d \in D$, когда считаются известными: а) множество решений $D = \{d_1, d_2, \ldots d_m\}$; б) множество входных параметров (переменных) $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$; в) диапазоны количественного изменения каждого параметра (переменной) $[x_{нi}, x_{вi}]$, $i = \overline{1,n}$; г) функции принадлежностей, позволяющие представить параметры $x_i, i = \overline{1,n}$ в виде нечетких множеств (2.6); д) матрица знаний.

Лингвистические оценки a_i^{jp}, $j = \overline{1,m}$, параметров (переменных) $x_i, i = \overline{1,n}$, входящих в логические высказывания о решениях (2.10), рассматриваем как нечеткие множества, определенные на универсальных множествах $U_i = [x_{нi}, x_{вi}]$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть $\mu^{a_i^{jp}}(x_i)$ – функция принадлежности параметра $x_i \in [x_{нi}, x_{вi}]$ нечеткому терму a_i^{jp}, а $\mu^{d_j}(X)$ – зависящая от n переменных функция принадлежности вектора входных параметров (переменных) $X = \left| x_1, x_2, \ldots x_n \right|$ решению d_j, $j = \overline{1, m}$. Связь между этими функциями определяется рассмотренной выше нечеткой базой знаний и может быть представлена в виде нечетких логических уравнений:

$$\mu^{d_1}(X) = \mu^{a_1^{11}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{11}}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu^{a_n^{11}}(x_n) \vee$$

$$\vee\, \mu^{a_1^{12}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{12}}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu^{a_n^{12}}(x_n) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \mu^{a_1^{1k_1}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{1k_1}}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu^{a_n^{1k_1}}(x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu^{d_m}(X) = \mu^{a_1^{m1}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{m1}}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu^{a_n^{m1}}(x_n) \vee$$

$$\vee\, \mu^{a_1^{m2}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{m2}}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu^{a_n^{m2}}(x_n) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \mu^{a_1^{mk_m}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{mk_m}}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu^{a_n^{mk_m}}(x_n),$$

где $\wedge$ – логическое ***и***, $\vee$ – логическое ***или***.

Эти уравнения получены из логических высказываний (нечеткой базы знаний) путем замены лингвистических термов a_i^{jp} и d_j соответствующими функциями принадлежности, а операций $\bigcap$(***и***) и $\bigcup$(***или***) на операции $\wedge$ и $\vee$. В общем виде систему нечетких логических уравнений можно записать как

$$\mu^{d_j}(X) = \bigvee_{p=1}^{k_j} [\bigwedge_{i=1}^{n} \mu^{a_i^{jp}}(x_i)],\ j = \overline{1, m}. \qquad (2.11)$$

Принятие конкретного решения $d^* \in D$ можно осуществить таким образом. 1. При фиксированных значениях входных параметров $X^* = \left| x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^* \right|$ задать функции принадлежности нечетких термов и определить значения этих функций. 2. Пользуясь логическими уравнениями (2.11), вычислить значения многомерных функций принадлежности $\mu^{d_j}(X^*)$ для всех решений $d_j,\ j=\overline{1,m}$. 3. Логические операции $\wedge$ и $\vee$ над функциями принадлежностей заменить соответственно на операции min и max согласно следующим выражениям:

$$\mu(a) \wedge \mu(b) = \min[\mu(a), \mu(b)];$$
$$\mu(a) \vee \mu(b) = \max[\mu(a), \mu(b)].$$

4. Определить решение $d^* \in D$, для которого $\mu^{d_j^*}(X^*) = \max\limits_{j=\overline{1,m}}[\mu^{d_j}(X^*)]$.

Изложенный алгоритм принятия решения использует идентификацию лингвистического терма по максимуму функции принадлежности и реализуется на матрице значений функции принадлежности, полученной из матрицы знаний, путем выполнения операций min и max. Матричная реализация алгоритма принятия решения имеет следующий вид:

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \left.\mu^{11}(x_1) \quad \mu^{11}(x_2) \quad \ldots \quad \mu^{11}(x_n)\right\}\min \\ \left.\mu^{12}(x_1) \quad \mu^{12}(x_2) \quad \ldots \quad \mu^{12}(x_n)\right\}\min \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\mu^{1k_1}(x_1) \quad \mu^{1k_1}(x_2) \quad \ldots \quad \mu^{1k_1}(x_n)\right\}\min \end{matrix}\right\}\max \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{matrix} \left.\mu^{m1}(x_1) \quad \mu^{m1}(x_2) \quad \ldots \quad \mu^{m1}(x_n)\right\}\min \\ \left.\mu^{m2}(x_1) \quad \mu^{m2}(x_2) \quad \ldots \quad \mu^{m2}(x_n)\right\}\min \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\mu^{mk_m}(x_1) \quad \mu^{mk_m}(x_2) \quad \ldots \quad \mu^{mk_m}(x_n)\right\}\min \end{matrix}\right\}\max \end{matrix}\right\}\max .$$

Рассмотрим метод разработки алгоритма принятия решения, позволяющий фиксированному множеству *качественных* оценок входных параметров $\langle a_1^*,\ldots,a_n^*\rangle$, $a_i^* \in A_i = \{a_i^1, a_i^2,\ldots,a_i^{L_i}\}$ поставить в соответствие решение $d_j^* \in D$, когда считаются известными: а) множество решений $D=\{d_1, d_2,\ldots d_m\}$; б) функции принадлежности, позволяющие представить каждое решение $d_j,\ j=\overline{1,m}$ в виде нечеткого множества (2.9); в) множество входных параметров $X=\{x_1, x_2, ...x_n\}$; г) множество лингвистических термов для качественной оценки параметров x_i, т. е. $A_i=\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^{L_i}\}$, $i=\overline{1,n}$; д) функции принадлежности, позволяющие представить качественные термы параметров $x_i, i=\overline{1,n}$ в виде нечетких множеств (2.8); е) матрица знаний.

Рассмотрим на матрице знаний строку с номером $j1$, которой соответствует нечеткое логическое высказывание

$$\textbf{\textit{Если}}\ (x_1=a_1^{j1})\ \textbf{\textit{и}}\ (x_2=a_2^{j1})\ldots\textbf{\textit{и}}\ (x_n=a_n^{j1}),\ \textbf{\textit{то}}\ d=d_j, \qquad (2.12)$$

где $a_i^{j1}\subset U_i$, $i=\overline{1,n}$, $d_j\in W$ (U_i и W – универсальные множества, определяемые соотношениями (2.4) и (2.5)). Высказывание (2.12) можно представить в виде системы n элементарных высказываний

$$\begin{array}{l}\textbf{\textit{Если}}\ (x_1=a_1^{j1}),\ \textbf{\textit{то}}\ d=d_j\\ \textbf{\textit{и}}\\ \textbf{\textit{Если}}\ (x_2=a_2^{j1}),\ \textbf{\textit{то}}\ d=d_j\\ \textbf{\textit{и}}\ldots.\\ \textbf{\textit{Если}}\ (x_n=a_n^{j1}),\ \textbf{\textit{то}}\ d=d_j,\end{array} \qquad (2.13)$$

которой соответствует система нечетких отношений

$$\begin{array}{l}R_{x_1}=a_1^{j1}\times d_j,\quad R_{x_1}\subset U_1\times W,\\ R_{x_2}=a_2^{j1}\times d_j,\quad R_{x_2}\subset U_2\times W,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ R_{x_n}=a_n^{j1}\times d_j,\quad R_{x_n}\subset U_n\times W,\end{array} \qquad (2.14)$$

где декартово произведение обычных множеств U_i и W определяется как

$$U_i\times W=\left\{(v_i^k, w^r),\quad v_i^k\in U_i,\quad w^r\in W\right\},$$

$k=\overline{1,q_i}$, $r=\overline{1,q_m}$, $i=\overline{1,n}$ (q_i и q_m – мощности множеств U_i и W).

Декартово произведение нечетких множеств a_1^{j1} и d_j определяется как

$$a_1^{j1}\times d_j=\sum_{U_1\times W}[\mu(a_1^{j1}, v_i^k)\wedge\mu(d_j, w^r)]/(v_i^k, w^r),$$

где степени принадлежностей определяются по формулам (2.8) и (2.9).

В соответствии с композиционным правилом вывода каждое отношение из (2.14) позволяет оценивать нечеткое множество $d_j \subset W$, интерпретируемое в терминах вывода (решения) $d_j \in D$, а именно:

$$
\begin{aligned}
&d_j = x_1 \circ (a_1^{j1} \times d_j),\\
&d_j = x_2 \circ (a_2^{j1} \times d_j),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.15)\\
&d_j = x_n \circ (a_n^{j1} \times d_j),
\end{aligned}
$$

где $\circ$ – операция нечеткой композиции.

Объединяя, согласно (2.13), все соотношения в (2.15) операцией $\bigcap$ (***и***), получим формулу для одной строки матрицы знаний с номером $j1$:

$$d_j = \bigcap_{i=1}^{n} [x_i \circ (a_i^{j1} \times d_j)]. \qquad (2.16)$$

Выпишем аналогичные формулы для строк с номерами $j2,..., jk_j$:

$$d_j = \bigcap_{i=1}^{n} [x_i \circ (a_i^{j2} \times d_j)], \ldots d_j = \bigcap_{i=1}^{n} [x_i \circ (a_i^{jk_j} \times d_j)]. \qquad (2.17)$$

Поскольку в системе нечетких логических высказываний (2.10) различные строки, соответствующие решению $d_j \in D$, объединены операцией $\bigcup$ (***или***), то соотношения (2.16), (2.17) также следует объединить этой операцией и записать единое соотношение

$$d_j = \bigcup_{p=1}^{k_j} \{ \bigcap_{i=1}^{n} [x_i \circ (a_i^{jp} \times d_j)] \}. \qquad (2.18)$$

Это соотношение позволяет вычислять нечеткое множество $d_j \subset W$ на основе информации, содержащейся в строках матрицы знаний с номерами $j1, j2,..., jk_j$.

Поскольку искомое нечетное множество – решение d представляет собой объединение операцией $\bigcup$ (***или***) различных решений d_j, $j = \overline{1, m}$, т. е. $d = d_1 \bigcup d_2 \bigcup ... \bigcup d_m$, то с учетом выражения (2.18) получим

$$d = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{p=1}^{k_j} \{ \bigcap_{i=1}^{n} [x_i \circ (a_i^{jp} \times d_j)]\} \ . \tag{2.19}$$

Полученное соотношение (2.19) позволяет оценить нечеткое множество d, которое должно быть интерпретировано в терминах одного из решений d_j, $j = \overline{1, m}$.

Пусть конкретные входные параметры оцениваются лингвистическими термами (нечеткими множествами) $x_1 = a_1^*, ..., x_n = a_n^*$, заданными на универсумах $U_1, ..., U_n$. Тогда, согласно (2.19), решением будет нечеткое множество d^*, заданное на универсуме W и вычисляемое по формуле

$$d^* = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{p=1}^{k_j} \{ \bigcap_{i=1}^{n} [a_i^* \circ (a_i^{jp} \times d_j)]\} \, .$$

Сформируем ***модифицированную матрицу знаний***, в которой a_i^p – нечеткое множество, соответствующее лингвистической оценке параметра x_i в ситуации с номером p, а d^p – нечеткое множество-решение для p-й ситуации ($a_i^p \subset U$, $d^p \subset W$, $i = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, N}$). Для этого перенумеруем строки ***матрицы знаний*** номерами 1,2,…N, учитывая, что число ситуаций (условий) $N = k_1 + k_2 + ... + k_m$.

Тогда, в соответствии с (2.19), расчет нечеткого множества-решения на основе модифицированной матрицы знаний можно произвести по формуле:

$$d = \bigcup_{p=1}^{N} \{ \bigcap_{i=1}^{n} [x_i \circ (a_i^p \times d^p)] \, . \tag{2.20}$$

При этом модифицированная матрица знаний имеет следующий вид:

Номера ситуаций	*Входные параметры*					*Решение d*
1	$x_1 = a_1^1$	...	$x_i = a_i^1$	...	$x_n = a_n^1$	d^1
2	$x_1 = a_1^2$	...	$x_i = a_i^2$	...	$x_n = a_n^2$	d^2
...	...	...	...	...	...	...
p	$x_1 = a_1^p$	...	$x_i = a_i^p$	...	$x_n = a_n^p$	d^p
...	...	...	...	...	...	...
N	$x_1 = a_1^N$	...	$x_i = a_i^N$	...	$x_n = a_n^N$	d^N

Соотношения (2.19) и (2.20) позволяют на основе информации, содержащейся в ***матрице знаний*** или в ***модифицированной матрице знаний***, выводить нечеткие множества-решения для текущих лингвистических оценок входных параметров.

Нечеткое множество – решение $d^* \subset W$, полученное в результате логического вывода из ***матрицы знаний*** при фиксированных нечетких оценках входных параметров $x_1 = a_1^* \subset U_1,..., x_n = a_n^* \subset U_n$, необходимо интерпретировать в терминах одного из решений $d_j \in D$, $j = \overline{1,m}$. В соответствии с (2.9) каждое решение $d_j \in D$ представляет собой нечеткое множество $d_j = \sum_{r=1}^{q_m} \mu(d_j, w^r) / w^r$. Аналогично, нечеткое множество $d^* \subset W$ выражается как $d^* = \sum_{r=1}^{q_m} \mu(d^*, w^r) / w^r$. Для интерпретации нечеткого множества $d^* \subset W$ необходимо найти нечеткое множество $d_j \in D = \{d_1, d_2, ... d_m\}$, являющееся ближайшим к нечеткому множеству $d^* \subset W$. Решить эту задачу можно следующим образом. Вычислить расстояние Хемминга между d_j и d^*, которое определяется как $\Delta(d_j, d^*) = \sum_{r=1}^{q_m} \left|\mu(d^*, w^r) - \mu(d_j, w^r)\right|$ для всех $i = 1,2,...,m$ и выбрать такое $d_j \in D$, для которого $\Delta(d_j, d^*) = \min\limits_{j=\overline{1,m}}[\Delta(d_j, d^*)]$. Найденному нечеткому множеству $d_j \in D$ и будет соответствовать искомое решение.

В тех случаях, когда среди множества входных параметров, влияющих на решение, имеются как количественные, так и качественные, можно указать два пути принятия решения: 1. Преобразовать все *количественные* входные параметры в *качественные* и применить алгоритм нечеткого логического вывода (см. выражения (2.12)–(2.20)). При этом качественные термы, соответствующие фиксированным значениям качественных входных параметров, надо выбирать по принципу максимума функций принадлежностей. 2. Преобразовать все *качественные* входные параметры в *количественные* и применить алгоритм нечетких логических уравнений (см. выражение (2.11)). При этом количественное измерение качественных параметров обеспечивается за счет введения искусственных шкал универсальных множеств типа (2.4), (2.5). Алгоритм нечетких логических уравнений менее трудоемкий с вычислительной точки зрения (не надо выполнять операции нечеткого декартова произведения и хранить в памяти компьютера соответствующие матрицы) и не требует интерпретации результатов нечеткого логического вывода, но для применения этого алгоритма входные параметры должны быть количественные.

Заканчивая рассмотрение вопроса формализации процесса принятия решений на базе нечеткой логики, отметим следующее. Представление входных параметров в виде лингвистических переменных с нечеткими термами позволяет описать причинно-следственные связи “входные параметры – решение” на естественном языке с помощью нечетких логических высказываний. Введение ***матрицы знаний*** позволяет формализовать ситуационную информацию в виде нечетких логических высказываний, связывающих лингвистические переменные решений и входных параметров. Переход от ***матрицы знаний*** к нечетким логическим уравнениям позволяет связать функции принадлежностей решений и входных параметров, а затем выбрать решение с наибольшим значением функции принадлежности для конкретного набора количественных входных параметров. Переход от ***матрицы знаний*** к композиционному правилу вывода, обобщенному на случай многих входных переменных, позволяет получить нечеткое множество-решение для конкретного набора качественных входных параметров.

Для применения рассмотренных алгоритмов необходимо иметь функции принадлежностей (ФП), позволяющие представлять входные параметры в виде нечетких множеств. Рассмотрим задачу построения ФП при наличии следующих исходных данных: 1) название входного параметра $x_i, i=\overline{1,n}$; 2) диапазон $[x_{нi}, x_{вi}]$ изменения параметра x_i; 3) количество термов, используемых для лингвистической оценки параметра x_i; 4) название каждого лингвистического терма. При построении ФП надо учитывать вид входных параметров (количественные или качественные) и количество термов, используемое для лингвистической оценки входных параметров (одинаковое или различное).

Рассмотрим построение ФП для количественных входных параметров при одинаковом числе термов, с помощью которых оцениваются все лингвистические переменные $x_i, i=\overline{1,n}$. Отметим, что функция принадлежности (ФП) $\mu^T(u)$ характеризует субъективную меру уверенности эксперта в том, что четкое значение u соответствует нечеткому терму T. Предположим, что число термов равно 5 и они имеют названия: *низкий* (Н), *ниже среднего* (НС), *средний* (С), *выше среднего* (ВС), *высокий* (В).

Отобразим диапазоны $[x_{нi}, x_{вi}]$ изменения параметров $x_i, i=\overline{1,n}$ на единое универсальное множество $U=[0,1]$ (см. рис. 2.1).

При этом пересчет фиксированного значения параметра $x_i^* \in [x_{нi}, x_{вi}]$ в соответствующий элемент $u^* \in [0,1]$ определяется пропорцией

$$(x_{вi} - x_{нi})/(1-0) = (x_i^* - x_{нi})/(u^* - 0),$$

из которой получаем

$$u^* = (x_i^* - x_{нi})/(x_{вi} - x_{нi}) . \qquad (2.21)$$

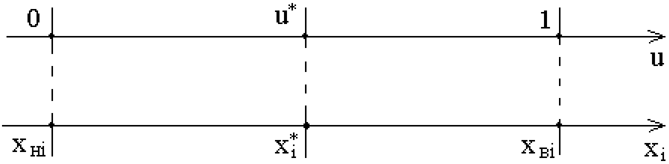

Рис. 2.1

Например, на множестве $U=[0,1]$ зададим пять нечетких подмножеств, ФП которых показаны на рис. 2.2.

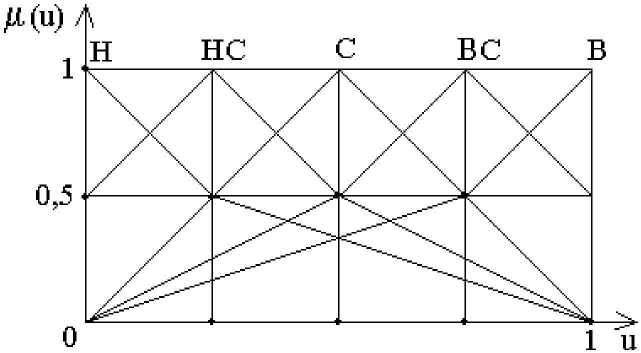

Рис. 2.2

Для получения аналитических выражений предложенных ФП воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точки с координатами (u_1,μ_1) и (u_2,μ_2), которое имеет вид:

$$\mu(u)=[(\mu_2-\mu_1)u+\mu_1 u_2-\mu_2 u_1](u_2-u_1)\,. \qquad (2.22)$$

В соответствии с рис. 2.2 получим следующие ФП $\mu^T(u)$, $u\in U=[0,1]$, $T=$ Н, НС, С, ВС, В:

$$\mu^{\text{Н}}(u)=\begin{cases} 1-2u, & u\in[0,1/4];\\ 2(1-u)/3, & u\in[1/4,1];\end{cases}$$

$$\mu^{\text{НС}}(u)=\begin{cases}1/2+2u, & u\in[0,1/4];\\ 3/2-2u, & u\in[1/4,1/2];\\ 1-u, & u\in[1/2,1];\end{cases}\quad \mu^{\text{С}}(u)=\begin{cases}2u, & u\in[0,1/2];\\ 2(1-u), & u\in[1/2,1];\end{cases}$$

$$\mu^{\text{ВС}}(u)=\begin{cases}u, & u\in[0,1/2];\\ 2u-1/2, & u\in[1/2,3/4];\\ 5/2-2u, & u\in[3/4,1];\end{cases}\quad \mu^{\text{В}}(u)=\begin{cases}2u/3, & u\in[0,3/4];\\ 2u-1, & u\in[3/4,1].\end{cases}$$

Переход от полученных ФП $\mu^T(u)$ к ФП $\mu(x_i)$, используемым в нечетких логических уравнениях (см. формулу (2.11)), определяется соотношением (2.21).

Для настройки введенных ФП на экспертные данные можно пользоваться операцией возведения в степень: $[\mu(u)]^c$, где показатель степени определяет изменение формы ФП (см. рис. 2.3).

Применение операций сжатия и растяжения можно осуществлять для каждого отрезка ФП на рис. 2.2. Коэффициент c называют коэффициентом относительной важности.

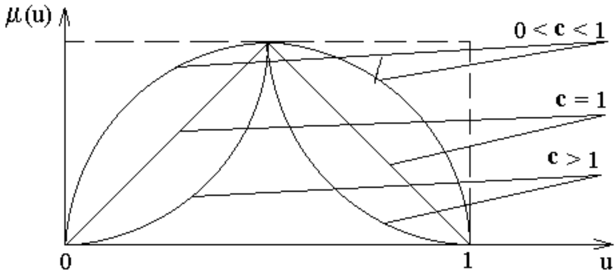

Рис. 2.3

При различном числе термов ФП аппроксимируют обычно треугольниками, которые можно строить по следующим правилам (см. рис. 2.4):

1. Основанием треугольника является универсальное множество (интервал) $U_i=[0,\ L_i-1]$, где L_i- целое число, соответствующее количеству термов лингвистической переменной $x_i,\ i=\overline{1,n}$.

2. Термы нумеруются целыми числами от 1 до L_i.

3. Вершина треугольника соответствует номеру лингвистического терма (интерпретация номера терма может быть различной в зависимости от специфики лингвистической переменной).

Диапазон $[x_{нi}, x_{вi}]$ изменения параметра x_i отображают на множество $U_i = [0,\ L_i - 1]$, которое считают универсальным множеством переменной x_i. Пересчет фиксированного значения $x_i^* \in [x_{нi}, x_{вi}]$ в соответствующий элемент $u_i^* \in [0,\ L_i - 1]$ определяется пропорцией

$$(x_{вi} - x_{нi})/(L_i - 1) = (x_i^* - x_{нi})/u_i^*,$$

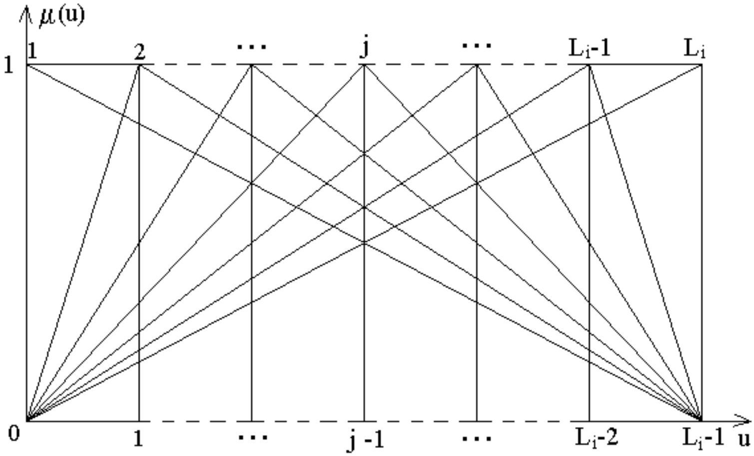

Рис. 2.4

из которой получаем

$$u_i^* = (L_i - 1)(x_i^* - x_{нi})/(x_{вi} - x_{нi}). \qquad (2.23)$$

ФП $\mu^j(u)$ нечеткого терма с номером j (см. рис. 2.4) определяется прямыми линиями, которые проходят через точки с координатами:

$[0,1]$ и $[L_i - 1,0]$ при $u \in [0,\ L_i - 1]$ для j =1;

$[0,0]$ и $[j-1,1]$ при $u \in [0,\ \mathrm{j}-1]$ и

$[j-1,1]$ и $[L_i-1,0]$ при $u \in [j-1,\ L_i-1]$ для $j=\overline{2, L_i-1}$;

$[0,0]$ и $[L_i-1,1]$ при $u \in [0,\ L_i-1]$ для $j=L_i$.

Используя уравнение прямой (2.22), проходящей через две точки с известными координатами, получим:

$$\mu^j(u)=\begin{cases} 1-u/(L_i-1), u \in [0,\ L_i-1],\ j=1; \\ u/(j-1), u \in [0,\ \mathrm{j}-1],\ j=\overline{2, L_i-1}; \\ (L_i-1-u)/(L_i-j), u \in [j-1,\ L_i-1],\ j=\overline{2, L_i-1}; \\ u/(L_i-1), u \in [0,\ L_i-1],\ j=L_i. \end{cases} \qquad (2.24)$$

Например, при числе термов $L_i = 7$ по формулам (2.23), (2.24) получаем следующие аналитические выражения:

$$u_i^* = 6(x_i^* - x_{нi})/(x_{вi} - x_{нi});$$

$$\mu_1(u) = 1 - u/6,\quad u \in [0,6];$$

$$\mu_2(u)=\begin{cases} u,\quad u \in [0,1], \\ (6-u)/5,\quad u \in [1,6]; \end{cases} \qquad \mu_3(u)=\begin{cases} u/2,\quad u \in [0,2], \\ (6-u)/4,\quad u \in [2,6]; \end{cases}$$

$$\mu_4(u)=\begin{cases} u/3,\quad u \in [0,3], \\ (6-u)/3,\quad u \in [3,6]; \end{cases} \qquad \mu_5(u)=\begin{cases} u/4,\quad u \in [0,4], \\ (6-u)/2,\quad u \in [4,6]; \end{cases}$$

$$\mu_6(u)=\begin{cases} u/5,\quad u \in [0,5], \\ 6-u,\quad u \in [5,6]; \end{cases} \qquad \mu_7(u) = u/6,\quad u \in [0,6].$$

Получаемые из соотношения (2.24) аналитические выражения функций принадлежностей закладываются в оболочку нечеткой экспертной системы для выполнения задач принятия решения.

Наиболее часто используются две треугольные, симметричные относительно абсциссы $u = 0{,}5$ на едином универсальном множестве $U = [0,1]$ функции принадлежности, математическое описание которых задается в виде:

$$\mu_1(u) = (1-u),\quad \mu_2(u) = u,\quad 0 \le u \le 1. \qquad (2.25)$$

Кроме треугольных и трапециевидных ФП получили распространение также колоколообразные и гауссовы ФП. Простая и удобная для настройки аналитическая модель колоколообразной ФП имеет вид (см. рис. 2.5)

$$\mu^T(u) = \frac{1}{1+(\frac{u-b}{c})^2}, \tag{2.26}$$

где b – координата максимума функции (наиболее возможное значение переменной u, при котором ордината функции равна 1), c – коэффициент растяжения (концентрации) функции.

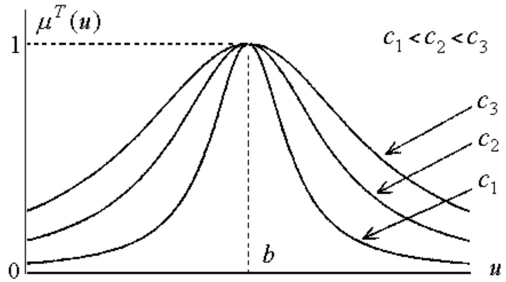

Рис. 2.5

Простая и удобная для настройки аналитическая модель гауссовой ФП имеет вид (см. рис. 2.6)

$$\mu^T(u) = \exp[-\frac{(u-b)^2}{2c^2}], \tag{2.27}$$

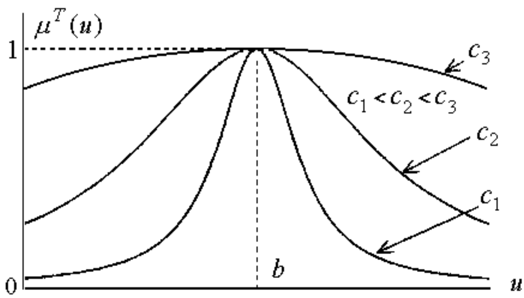

Рис. 2.6