А. О. Андреева

ЕГЭ по математике
Практическая подготовка

- 560 заданий для подготовки к ЕГЭ
- Все темы от В1 до С3 с последними изменениями
- Теоретическая справка: формулы, определения, теоремы, преобразования, табличные данные
- Ответы и решения

bhv®

А. О. Андреева

ЕГЭ по математике
Практическая подготовка

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2012

УДК 373:51
ББК 22.1я72
А65

Андреева А. О.

А65 ЕГЭ по математике. Практическая подготовка. — СПб.: БХВ-Петербург, 2009. — 256 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-0813-1

Пособие предназначено для целевой подготовки к сдаче экзамена по математике в формате ЕГЭ.

Первая часть содержит краткую теорию в виде формул, таблиц, теорем по необходимым на экзамене темам: формулы сокращенного умножения, преобразование степеней и корней, квадратное уравнение, парабола, логарифмы, табличные значения тригонометрических функций, тригонометрические формулы, обратные тригонометрические функции, площади фигур, объемы и площади поверхностей фигур, необходимые теоремы геометрии, правила дифференцирования производных, производные элементарных функций, уравнение касательной функции. Во второй части даны блоки заданий от B1 до C3, содержащие разобранный типовой пример и от 5-и до 15-и заданий для самостоятельного решения. Приводятся ответы.

Для образовательных учреждений

УДК 373:51
ББК 22.1я72

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Татьяны Олоновой*
Корректор	*Наталия Першакова*
Дизайн и оформление обложки	*Марины Дамбиевой*

Подписано в печать 05.04.12.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16.
Тираж 1500 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Первая Академическая типография «Наука»
199034, Санкт-Петербург, 9-я линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-0813-1

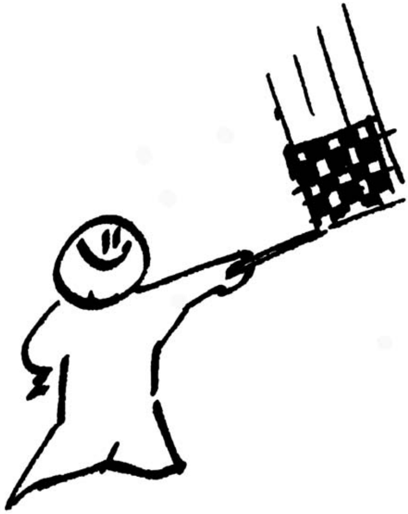
Содержание

Благодарности

Хочется выразить особую благодарность прекрасным учителям математики, профессионалам своего дела: методисту по математике Калининского района, учителю математики Бестужевской гимназии № 159 *Елене Владимировне Шпаковой*, учителю математики школы-интерната № 9 *Алле Владимировне Цветковой*, учителю математики Бестужевской гимназии № 159 *Маргарите Александровне Смирновой*, учителю школы с углубленным изучением математики № 139 *Юлии Валерьевне Бунтовой*, учителю математики Бестужевской гимназии № 159 *Анне Сергеевне Ивановой*, а также учителям русского языка Бестужевской гимназии № 159 *Валерии Герасимовне Смирновой* и *Ольге Львовне Тупаец*.

Выражаю благодарность моей семье, и особенно мужу Борису и дочери Софье за моральную поддержку.

Автор с удовольствием ответит на все вопросы по заданиям и решениям: ege_matematika@mail.ru.



Теория

Формулы сокращенного умножения

1. Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2. Квадрат суммы: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. Квадрат разности: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4. Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
5. Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
6. Куб суммы: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
7. Куб разности: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Преобразование степеней и корней

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
4. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
5. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
6. $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$
7. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
8. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
9. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$
10. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
11. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
12. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
13. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
14. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
15. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
16. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Квадратное уравнение. Парабола

Квадратное уравнение — уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Чтобы решить квадратное уравнение, нужно:

1. **Найти дискриминант по формуле:** $D = b^2 - 4ac$.

   Если $D > 0$, то уравнение имеет 2 корня,

   если $D = 0$, то уравнение имеет 1 корень,

   если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

2. **Найти корни уравнения:**

   Если $D > 0$, то корни уравнения находятся по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

   Если $D = 0$, то корень уравнения находится по формуле:

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Теорема Виета:

По теореме Виета корни уравнения находим по формулам:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

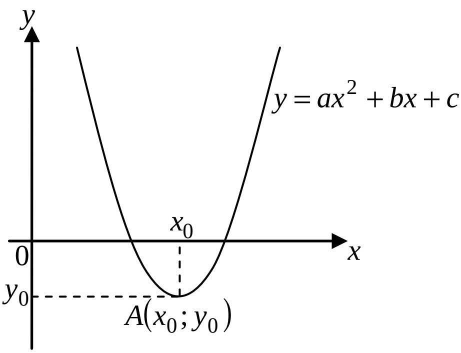
Разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Если сумма коэффициентов квадратного уравнения $a+b+c=0$, то $x_1=1$; $x_2=\dfrac{c}{a}$.

Если выражение $a-b+c=0$, то $x_1=-1$ $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

Уравнение параболы: $y=ax^2+bx+c$ при $a\neq 0$.



Точка $A(x_0;y_0)$ — вершина параболы.

Координаты вершины параболы находим по формулам:

$$x_0=-\frac{b}{2a};$$

$$y_0=a(x_0)^2+bx_0+c.$$

Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх; если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз.

Логарифмы

Логарифм числа b по основанию a — показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получилось b.

Получаем $\log_a b = t \Rightarrow a^t = b$.

Натуральный логарифм — логарифм числа b по основанию e (экспонента $e = 2{,}71828\ldots$): $\ln b$.

Десятичный логарифм — логарифм числа b по основанию 10: $\lg b$.

Логарифм $\log_a b$ имеет смысл при условиях: $\begin{cases} a > 0; \\ a \neq 1; \\ b > 0. \end{cases}$

Формулы логарифмов

1. $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$
2. $\log_{a^d} b = \dfrac{1}{d} \cdot \log_a b$
3. $\log_{a^d} b^c = \dfrac{c}{d} \cdot \log_a b$
4. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$
5. $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$
6. $a^{\log_a b} = b$
7. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
8. $\dfrac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$
9. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

Табличные значения тригонометрических функций

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\mathrm{tg}x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
$\mathrm{ctg}x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

Тригонометрические формулы

Основные тригонометрические формулы

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

3. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Формулы сложения и вычитания аргументов

1. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

2. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

3. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

4. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

5. $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

6. $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

7. $\operatorname{ctg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}$

8. $\operatorname{ctg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}$

Формулы двойного угла

1. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

3. $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

4. $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$

Формулы понижения степени

1. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

2. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Формулы тройного угла

1. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

2. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

3. $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$

4. $\operatorname{ctg} 3x = \dfrac{3\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}{1 - 3\operatorname{ctg}^2 x}$

Формулы преобразования суммы и разности функций

1. $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

2. $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

3. $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

4. $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

5. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$

6. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$

7. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$

8. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{-\sin(x-y)}{\sin x \sin y}$

Формулы преобразования произведений функций

1. $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

2. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

3. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

Обратные тригонометрические функции

Арксинус числа x, $-1 \le x \le 1$, называется такое число α, $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, синус которого равен x.

$\arcsin x = \alpha$, если $\sin \alpha = x$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$

При решении уравнений типа: $\sin \alpha = x$ получим общее решение:

- при $x > 0$:

$$\alpha = (-1)^k \arcsin x + \pi k\ ;\ k \in Z\ ;$$

- при $x < 0$:

$$\alpha = (-1)^{k+1} \arcsin |x| + \pi k\ ;\ k \in Z\ .$$

Арккосинус числа x, $-1 \le x \le 1$, называется такое число α, $0 \le \alpha \le \pi$, косинус которого равен x.

$\arccos x = \alpha$, если $\cos \alpha = x$;

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

При решении уравнений типа: $\cos \alpha = x$ получим общее решение:

- при $x > 0$:

$$\alpha = \pm \arccos x + 2\pi k\ ;\ k \in Z\ ;$$

- при $x < 0$:

$$\alpha = \pm(\pi - \arccos |x|) + 2\pi k\ ;\ k \in Z\ .$$

Арктангенс числа x, $x \in R$, называется такое число α, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен x.

$\mathrm{arctgx} = \alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha = x$.

$\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x$

При решении уравнений типа: $\mathrm{tg}\alpha = x$, получим общее решение:

- при $x > 0$:

$$\alpha = \mathrm{arctg}x + \pi k;\ k \in Z;$$

- при $x < 0$:

$$\alpha = -\mathrm{arctg}|x| + \pi k;\ k \in Z.$$

Арккотангенс числа x, $x \in R$, называется такое число α, $0 < \alpha < \pi$, котангенс которого равен x.

$\mathrm{arcctg}x = \alpha$, если $\mathrm{ctg}\alpha = x$;

$\mathrm{arcctg}(-x) = -\mathrm{arcctg}x$

При решении уравнений типа: $\mathrm{ctg}\alpha = x$, получим общее решение:

- при $x > 0$:

$$\alpha = \mathrm{arcctg}x + \pi k;\ k \in Z;$$

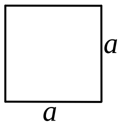
- при $x < 0$:

$$\alpha = -\mathrm{arcctg}|x| + \pi k;\ k \in Z.$$

Площади фигур

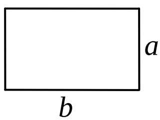
1. Площадь квадрата:

$S = a^2$, где a — сторона квадрата



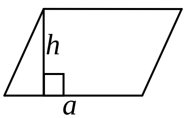
2. Площадь прямоугольника:

$S = ab$, где a, b — стороны прямоугольника

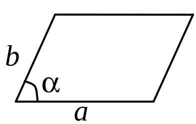


3. Площадь параллелограмма:

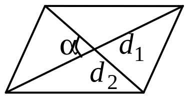
- $S = ah$, где a — сторона; h — высота параллелограмма;



- $S = ab\sin\alpha$, где a, b — стороны; α — угол между сторонами параллелограмма

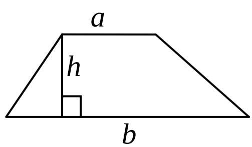


- $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где d_1, d_2 — диагонали; α — угол между диагоналями параллелограмма

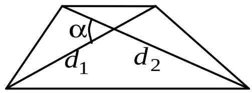


4. Площадь трапеции:

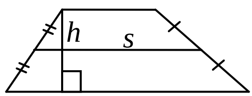
- $S=\frac{a+b}{2}h$, где a, b — основания; h — высота трапеции



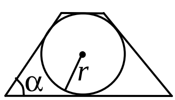
- $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где d_1, d_2 — диагонали; α — угол между диагоналями трапеции



- $S=sh$, где s — средняя линия трапеции; h — высота трапеции

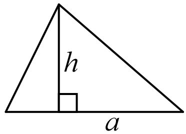


Площадь равнобедренной трапеции: $S=\frac{4r^2}{\sin\alpha}$, где r — радиус вписанной окружности; α — угол при основании трапеции

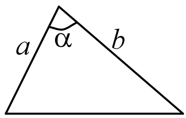


5. Площадь треугольника:

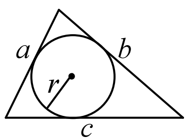
- $S = \frac{1}{2}ah$, где a — сторона; h — высота треугольника



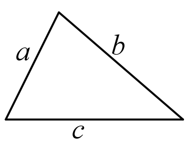
- $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, где a, b — стороны; α — угол между сторонами a и b треугольника



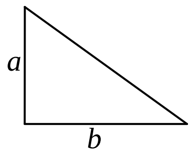
- $S = rp$, где r — радиус вписанной окружности; $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника



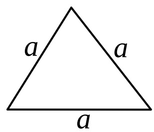
Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника



Площадь прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2}ab$, где a, b — катеты треугольника

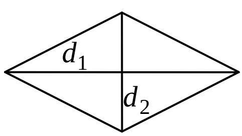


Площадь равностороннего треугольника: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника



6. Площадь ромба:

- $S = \frac{d_1 d_2}{2}$, где d_1, d_2 — диагонали ромба



- $S = ah$, где a — сторона; h — высота ромба