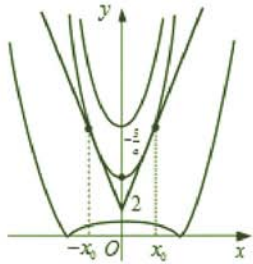
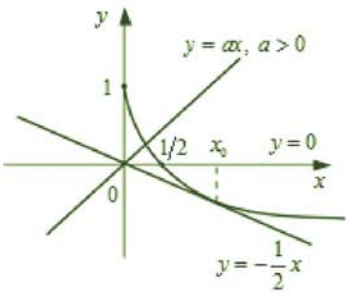
А. А. Черняк, Ж. А. Черняк

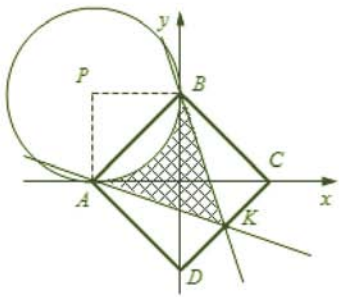


ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБРА. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

практическая подготовка





БАЗОВЫЙ **ПРОФИЛЬНЫЙ**

- Необходимая справочная теория
- Разбор сложных задач по каждой теме
- Приемы, рекомендации и комментарии при решении задач
- Большое количество задач для самостоятельного решения

bhv®

А. А. Черняк
Ж. А. Черняк

ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБРА. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

практическая подготовка

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2017

УДК 373:512
ББК 22.14я72
Ч-49

Черняк, А. А.

Ч-49 ЕГЭ по математике. Алгебра. Профильный уровень. Практическая подготовка / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк. — СПб.: БХВ-Петербург, 2017. — 432 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-3812-1

В книге рассмотрены традиционные разделы школьного курса алгебры на более высоком по сравнению с базовым уровне и разделы, не входящие в круг задач базового уровня, необходимые для сдачи ЕГЭ по математике профильного уровня: арифметические и алгебраические преобразования, преобразования графиков, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, комбинаторика и элементы теории вероятностей. Разбор текстовых задач по этим темам приведен в соответствующих главах. В каждой главе кратко представлены необходимые теоретические сведения, большое количество задач с комментариями и решениями, приведены подходы и методы решения классов задач, задачи для самостоятельного решения. Ответы даются в конце пособия.

Книга предназначена учащимся с базовым уровнем математической подготовки. Ее можно использовать для самостоятельной подготовки к профильному уровню ЕГЭ, на уроках, факультативных занятиях, подготовительных курсах, индивидуально с репетитором.

Для образовательных учреждений

УДК 373:512
ББК 22.14я72

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Екатерина Капалыгина*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Марины Дамбиевой*

Подписано в печать 31.01.17.
Формат 60×90 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 27.
Тираж 1100 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-3812-1

© Черняк А. А., Черняк Ж. А., 2017
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2017

Оглавление

Предисловие **5**

Обозначения и сокращения **7**

ГЛАВА 1. Числа, выражения, графики **9**

§ 1.1. Арифметические и алгебраические преобразования 9
§ 1.2. Преобразования графиков 31
Преобразование симметрии 31
Параллельный перенос 32
Преобразования растяжения (сжатия) 33
Два основных приема преобразования графиков, содержащих модули 35
§ 1.3. Задачи для самостоятельного решения 66

ГЛАВА 2. Алгебраические уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств **75**

§ 2.1. Уравнения и неравенства в целых числах 75
§ 2.2. Рациональные уравнения и неравенства 87
§ 2.3. Уравнения и неравенства с модулями 117
§ 2.4. Иррациональные уравнения и неравенства 132
§ 2.5. Системы уравнений 156
§ 2.6. Моделирование текстовых задач 178
§ 2.7. Задачи для самостоятельного решения 208

ГЛАВА 3. Тригонометрия **233**

§ 3.1. Преобразования тригонометрических выражений 233
§ 3.2. Тригонометрические уравнения и неравенства 253
§ 3.3. Задачи для самостоятельного решения 297

ГЛАВА 4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства 307

§ 4.1. Логарифмические выражения 307
§ 4.2. Показательные уравнения и неравенства 317
§ 4.3. Логарифмические уравнения и неравенства 334
§ 4.4. Задачи для самостоятельного решения 372

ГЛАВА 5. Комбинаторика и элементы теории вероятностей 385

§ 5.1. Элементарные правила комбинаторики 385
§ 5.2. Размещения, сочетания, перестановки 391
§ 5.3. Пространство случайных событий и классическое определение вероятности события 397
§ 5.4. Вычисление вероятности с использованием комбинаторики 400
§ 5.5. Теорема сложения и умножения вероятностей 404
§ 5.6. Задачи для самостоятельного решения 412

Ответы 421

К главе 1 421
К главе 2 421
К главе 3 424
К главе 4 426
К главе 5 428

Предисловие

Данная книга призвана научить решать все задания повышенного и высокого уровней сложности профильного ЕГЭ. (Задания базового уровня и часть задач профильного уровня ЕГЭ были рассмотрены в книге «ЕГЭ по математике. Алгебра. Базовый уровень. Практическая подготовка»[1], пользоваться которой можно начинать с «нулевого» уровня.) Помимо этого, она учитывает запросы и тех абитуриентов, которые поступают в престижные вузы России (подобные МФТИ) через олимпиады и внутривузовские экзамены.

Главная идея книги — систематизировать подходы и методы, нацеленные на применение к решению блоков задач. Все это призвано помочь абитуриенту и школьнику сориентироваться в многообразии крупных классов родственных алгебраических задач.

Каждая глава содержит опорные обучающие задачи, которые сопровождаются методическими советами, комментариями и общими алгоритмами, подсказывающими единые эффективные приемы решения. Разделы *«Задачи для самостоятельного решения»* в конце глав способствуют усвоению полученных навыков.

Книга предназначена школьникам с базовым уровнем подготовки и может служить основой для самостоятельной подготовки к ЕГЭ и вступительным экзаменам в вузы, а также использоваться на уроках математики, факультативах, подготовительных курсах, репетиторских занятиях.

---

[1] Черняк А., Черняк Ж. ЕГЭ по математике. Алгебра. Базовый уровень. Практическая подготовка. — СПб.: БХВ-Петербург, 2016.

Обозначения и сокращения

I — множество иррациональных чисел

Q — множество рациональных чисел

R — множество действительных чисел

Z — множество целых чисел

$\varnothing$ — пустое множество

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности

$\Rightarrow$ — знак логического следования

$\{a, b, c, ...\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c, ...

$[a; b]$ — замкнутый промежуток (отрезок, сегмент, числовой отрезок) с началом a и концом b, $a < b$

$(a; b]$ — полуоткрытый промежуток с началом a и концом b, $a < b$ (полуинтервал; числовой отрезок, открытый слева)

$[a; b)$ — полуоткрытый промежуток с началом a и концом b, $a < b$ (полуинтервал; числовой отрезок, открытый справа)

$(a; b)$ — открытый промежуток (интервал, открытый числовой отрезок) с началом a и концом b

$\log_a$ — логарифм с основанием a

lg — десятичный логарифм

$n!$ — n-факториал: произведение натуральных чисел от 1 до n

МПФ — метод пошаговой формализации

НОД — наибольший общий делитель

НОК — наименьшее общее кратное

ОДЗ — область допустимых значений

ГЛАВА 1.
Числа, выражения, графики

§ 1.1. Арифметические и алгебраические преобразования

Для успешного решения алгебраических уравнений и неравенств необходимо свободное владение техникой арифметических и алгебраических преобразований с нетривиальным использованием **формул сокращенного умножения**. Напомним применение этих формул к действиям с арифметическими корнями ($a \ge b$, $b \ge 0$) и затем решим несколько задач на их применение.

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right);$$

$$a-b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right);$$

$$a+b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right);$$

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(a+\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right);$$

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right).$$

Например:

$$5-9b=\left(\sqrt{5}-3\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{5}+3\sqrt{b}\right);$$

$$5-9b=\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{9b}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{45b}+\sqrt[3]{81b^2}\right).$$

Для избавления от иррациональности в выражениях вида $\dfrac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ домножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$, равное неполному квадрату суммы

знаменателя данной дроби. В силу формулы $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$ получаем

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}.$$

Аналогичное преобразование:

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}.$$

Преобразование выражений вида $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Например:

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2-5}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{3^2-5}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3+2}{2}}+\sqrt{\frac{3-2}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}.$$

Дополнительные формулы сокращенного умножения:

$$\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc;$$

$$\left(a-b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc.$$

Для преобразования суммы $a^{2n}+b^{2n}$ (разности $a^{2n}-b^{2n}$) степеней чисел a и b с четными показателями (n — любое целое число) удобно использовать формулы:

$$a^{2n}+b^{2n}=\left(a^n+b^n\right)^2-2a^nb^n,\quad a^{2n}-b^{2n}=\left(a^n-b^n\right)^2+2a^nb^n.$$

Задача 1. Упростить выражение:

$$A=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}.$$

Решение. Воспользуемся формулами сокращенного умножения:

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right);$$

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right)=$$

$$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right).$$

$$A=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{a+2\sqrt{ab}+b-a-\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Задача 2. Упростить выражение:

$$A=\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)^2-4\cdot\sqrt[4]{xy}}.$$

Решение. В знаменателе первого дробного выражения вынесем за скобки общий множитель $x^{\frac{1}{2}}$, а числитель разложим дважды по формуле разности квадратов; в числителе второго дробного выражения вынесем за скобки общий множитель $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$; в знаменателе третьего — представим арифметический корень в виде степени с рациональным показателем и после раскрытия скобок и приведения подобных запишем знаменатель как квадрат разности:

$$A=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{y^{\frac{1}{4}}}{1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{1}\cdot\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)^2}=\frac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}.$$

В арифметических выражениях периодическую дробь, не мешкая, переводите в обыкновенную по следующему правилу.

Пусть положительное число, меньшее единицы, записано в виде бесконечной десятичной периодической дроби x, в которой число цифр в периоде равно k, число цифр, стоящих после запятой до первого периода, равно m. Тогда искомое представление в виде обыкновенной дроби имеет следующий вид: $\dfrac{a-b}{\underbrace{99...9}_{k}\underbrace{00...0}_{m}}$, где a — натуральное число, цифры которого совпадают (в том же порядке) с цифрами периодической дроби x, стоящими после запятой до второго периода, b — натуральное число, цифры которого совпадают (в том же порядке) с цифрами периодической дроби x, стоящими после запятой до первого периода.

Например, в периодической дроби $x=0,0031(256)$: $k=3$ — число цифр в периоде, $m=4$ — число цифр, стоящих после запятой до первого периода, $a=00031256=31256$, $b=0031=31$. Поэтому $x=\dfrac{31256-31}{9990000}=\dfrac{31225}{9990000}$.

Задача 3. Найти x из равенства $\dfrac{0,1(6)+0,(3)}{0,1(51)+1,(03)}\cdot x=10$.

Решение. Вначале преобразуем периодические дроби в обыкновенные:

$$0,1(6)=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6},\qquad 0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3};$$

$$0,1(51)=\frac{151-1}{990}=\frac{150}{990}=\frac{5}{33},\quad 1,(03)=1\frac{3}{99}=1\frac{1}{33}.$$

Далее в числителе получаем $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$, в знаменателе получаем $\frac{5}{33}+1\frac{1}{33}=1\frac{6}{33}=1\frac{2}{11}$.

В итоге имеем:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1\frac{2}{11}}\cdot x=10 \quad\Rightarrow\quad x=2\cdot 10\cdot 1\frac{2}{11}=20\frac{40}{11}=23\frac{7}{11}.$$

Если имеется сумма или разность двух радикалов 2-й (3-й) степени, а под знаками радикалов — сопряженные выражения, обозначьте всю сумму или разность через A и возведите обе части полученного равенства в квадрат (в куб); при этом обратите сразу внимание на знак первоначального числа, чтобы в конце решения правильно выбрать одно из двух значений выражения.

Задача 4. Вычислить:

$$A=\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\ .$$

Решение. Возведем левую и правую части в квадрат:

$$A^2=\left(\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2 -$$

$$-2\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \left(\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = 16 - 2\sqrt{\left(8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = 16 - 2\sqrt{64-4\left(10+2\sqrt{5}\right)} \quad \Rightarrow \quad A^2 = 16 - 2\sqrt{24-8\sqrt{5}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ A^2 = 16 - 4\sqrt{6-2\sqrt{5}} \ \Rightarrow \ A^2 = 16 - 4\sqrt{5+1-2\sqrt{5}\cdot 1} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ A^2 = 16 - 4\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} \ \Rightarrow \ A^2 = 16 - 4\left(\sqrt{5}-1\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ A^2 = 20 - 4\sqrt{5} \ \Rightarrow \ |A| = \sqrt{20-4\sqrt{5}} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |A| = 2\sqrt{5-\sqrt{5}} \ \Rightarrow \ A = -2\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Здесь выбрано отрицательное значение A, поскольку первоначальное выражение меньше нуля (число $\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ меньше числа $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$).

Важным свойством множества **Q** рациональных чисел является его замкнутость относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления, т. е. сумма, разность, произведение и частное (исключая деление на нуль) двух рациональных чисел также будет рациональным числом. Множество **Z** целых чисел также замкнуто относительно трех операций — сложения, вычитания и умножения. Отметим, что множество **I** иррациональных чисел не замкнуто относительно всех арифметических операций. Например, $\sqrt{2}\sqrt{8} = 4$.

Замкнутость множеств **Q** и **Z** — важнейший фактор в решении задач, подобных приведенным далее.

Задача 5. Найти рациональные числа p и q, если известно, что число $a=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ является корнем уравнения $x^2+px+q=0$.

Решение. Вначале преобразуем число a, избавившись от иррациональности в знаменателе:

$$a=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}=\frac{8-2\sqrt{15}}{3-5}=\sqrt{15}-4.$$

Так как a — корень уравнения $x^2+px+q=0$, то

$$a^2+pa+q=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\sqrt{15}-4\right)^2+p\left(\sqrt{15}-4\right)+q=0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим: $(p-8)\sqrt{15}=4p-q-31$. Если $p\neq 8$, то $\sqrt{15}=\dfrac{4p-q-31}{p-8}$, что невозможно ввиду иррациональности $\sqrt{15}$ и рациональности $\dfrac{4p-q-31}{p-8}$. Итак, $p=8$, откуда $4\cdot 8-q-31=0 \;\Rightarrow\; q=1$.

Если требуется найти **наибольший общий делитель (НОД)** двух достаточно больших натуральных чисел, то лучше воспользоваться алгоритмом Евклида, поскольку нахождение канонических разложений больших чисел может оказаться обременительной задачей. Алгоритм нахождения $\text{НОД}(n,k)$, не требующий представления чисел в виде произведения простых делителей.

Алгоритм Евклида. Пусть $n\geq k$. Найти остаток r_1 при делении n на k. Если $r_1=0$, то $\text{НОД}(n,k)=k$. Если $r_1\neq 0$, то найти остаток r_2 при делении k на r_1. Если $r_2=0$, то $\text{НОД}(n,k)=r_1$. Если $r_2\neq 0$, то найти остаток r_3 при делении r_1 на r_2. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока не получится остаток r_m, равный нулю. В этом случае $\text{НОД}(n,k)$ будет равен предыдущему остатку r_{m-1}.

Задача 6. Найти НОД$(3599,\ 4819)$.

Решение. Разделим 4819 на 3599 с остатком: $4819 = 3599 \cdot 1 + 1220$.

Разделим 3599 на 1220 с остатком: $3599 = 1220 \cdot 2 + 1159$. Разделим 1220 на 1159 с остатком: $1220 = 1159 \cdot 1 + 61$. Разделим 1159 на 61 с остатком: $1159 = 61 \cdot 19 + 0$.

Итак, НОД$(3599,\ 4819) = 61$.

Основным инструментом при определении остатков больших степеней служит теорема Эйлера и ее следствие — малая теорема Ферма. Но вначале несколько определений.

Любое натуральное число $n > 1$ единственным (с точностью до перестановки сомножителей) способом можно представить в виде произведения $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$, где $p_1, ..., p_m$ — попарно различные простые делители числа m; $a_1, ..., a_m$ — натуральные числа, называемые **кратностями соответствующих делителей**. Такое представление называется **каноническим разложением числа *m***. Например, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ — каноническое разложение числа 360.

Функция Эйлера $\varphi(n)$, заданная на множестве натуральных чисел, определяется так: $\varphi(n)$ равно числу всех натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Очевидно, если n — простое число, то $\varphi(n) = n - 1$. Формула для вычисления функции Эйлера для чисел, заданных в каноническом виде:

$$\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}\right) =$$
$$= \left(p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1}\right) \cdot \left(p_2^{a_2} - p_2^{a_2 - 1}\right) \cdots \left(p_m^{a_m} - p_m^{a_m - 1}\right).$$

Например,

$$\varphi(10) = \varphi\left(2^1 \cdot 5^1\right) = \left(2^1 - 2^0\right)\left(5^1 - 5^0\right) = 4,$$

$$\varphi(360) = \varphi\left(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5\right) = \left(2^3 - 2^2\right)\left(3^2 - 3^1\right)\left(5^1 - 5^0\right) = 96.$$

Теорема Эйлера. Пусть натуральное число a взаимно просто с натуральным числом n. Тогда остатком от деления числа $a^{\varphi(n)}$ на n является 1.

Теорема Ферма. Пусть натуральное число a не делится на простое число p. Тогда остатком от деления числа a^{p-1} на p является 1.

Задача 7. На какую цифру оканчивается число 3657^{7563}?

Решение. Другими словами, надо найти остаток от деления 3657^{7563} на 10. Применим теорему Эйлера: так как $\varphi(10)=4$, то остаток от деления 3657^4 на 10 равен 1. Отсюда получаем:

$$3657^{7563}=3657^{4\cdot 1890+3}=3657^{4\cdot 1890}\cdot 3657^3=\left(3657^4\right)^{1890}\cdot 3657^3.$$

По доказанному выше, остаток от деления числа $\left(3657^4\right)^{1890}$ на 10 равен 1. Поэтому остается только найти остаток от деления числа 3657^3 на 10, который равен 3.

Задача 8. Дано число $3^{2002}+7^{2002}$. Найти его остаток от деления на 11.

Решение. Применим теорему Ферма: остаток от деления 3^{10} на 11 равен 1. Отсюда следует, что остаток от деления 3^{2000} на 11 также равен 1. Поэтому остаток от деления 3^{2002} на 11 совпадает с остатком от делении 3^2 на 11, т. е. равен 9. Аналогично, остаток от деления 7^{2002} на 11 равен остатку от деления 7^2 на 11, т. е. равен 5. Суммарный результат: 3.

Если для двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ можно найти такой многочлен $S(x)$, что $P(x)=Q(x)\cdot S(x)$, то говорят, что $P(x)$ делится на $Q(x)$, при этом $Q(x)$ называют **делителем многочлена** $P(x)$.

Если $P(x)$ не делится на $Q(x)$, то можно однозначно найти такие многочлены $S(x)$ и $R(x)$, для которых выполняется равенство $P(x)=Q(x)\cdot S(x)+R(x)$ и степень многочлена $R(x)$

меньше степени многочлена $Q(x)$. При этом $R(x)$ называется **остатком**, а $S(x)$ — **частным** при делении $P(x)$ на $Q(x)$.

Так же, как целые числа, многочлен $P_n(x)$ степени n можно разделить на многочлен $Q_m(x)$ степени m $(n \geq m)$ «уголком». Например:

$$
\begin{array}{l}
x^5+0x^4+6x^3+0x^2-2x-5 \,\big|\, \underline{x^2-2x+2} \\
\underline{x^5-2x^4+2x^3}+0x^2-2x-5 \,\big|\, x^3+2x^2+8x+12 \text{ — частное} \\
\quad 2x^4+4x^3+0x^2 \\
\quad \underline{2x^4-4x^3+4x^2} \\
\qquad 8x^3-4x^2-2x \\
\qquad \underline{8x^3-16x^2+16x} \\
\qquad\quad 12x^2-18x-5 \\
\qquad\quad \underline{12x^2-24x+24} \\
\qquad\qquad\qquad 6x-29 \text{ — остаток}
\end{array}
$$

Итак,

$$x^5+6x^3-2x-5=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^3+2x^2+8x+12\right)+6x-29.$$

Для деления многочлена $P_n(x)$ на линейный многочлен $x-c$ удобно применять **схему Горнера**: всякий многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ единственным образом представим в виде $P_n(x)=(x-c)\cdot Q_{n-1}(x)+R$, где $Q_{n-1}(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$ — частное, а число R — остаток. Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и остаток R вычисляются по формулам:

$$
\begin{cases}
b_0=a_0; \\
b_1=a_1+cb_0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{n-1}=a_{n-1}+cb_{n-2}; \\
R=a_n+cb_{n-1}.
\end{cases}
$$

Для вычислений по схеме Горнера используют таблицу, верхняя строка которой содержит коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ многочлена $P_n(x)$, а нижняя строка — коэффициенты $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$ многочлена $Q_{n-1}(x)$ и остаток R.

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	...	b_{n-1}	R

Алгоритм заполнения нижней строки таблицы. Старший коэффициент b_0 многочлена $Q_{n-1}(x)$ совпадает с числом a_0, т. е. «списывается» из верхней строки в нижнюю. Все остальные коэффициенты $b_1, ..., b_{n-1}$ и остаток R последовательно вычисляются так: b_k получается умножением числа c на коэффициент b_{k-1}, полученный на предыдущем шаге, и прибавлением к этому произведению числа a_k; R получается умножением числа c на коэффициент b_{n-1} и прибавлением к этому произведению числа a_n

	a_0	a_1	...	a_{k-1}	a_k	...
c	$b_0 = a_0$	$b_1 = cb_0 + a_1$	...	$b_{k-1} = cb_{k-2} + a_{k-1}$	$b_k = cb_{k-1} + a_k$	...

Задача 9. Разделить $P_5(x) = -2x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 1$ на $x - 1$, используя схему Горнера.

Решение.

	-2	0	0	0	1	1
1	-2	$1 \cdot (-2) + 0 = -2$	$1 \cdot (-2) + 0 = -2$	$1 \cdot (-2) + 0 = -2$	$1 \cdot (-2) + 1 = -1$	$1 \cdot (-1) + 1 = 0$

$$Q_4 = -2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1,$$

$$P_5(x) = (x-1) \cdot Q_4(x) = (x-1)\left(-2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1\right).$$

Теперь вспомним два основных типа последовательностей чисел — арифметическую и геометрическую прогрессии.

Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел, в которой каждый член, начиная со второго, отличается от предыдущего члена на одно и то же число d, называемое **разностью прогрессии**. Если $d > 0$, то прогрессия называется **возрастающей**; если $d < 0$, то прогрессия называется **убывающей**. Три числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, если и только если $b = \frac{a+c}{2}$.

Пусть a_n — n-й член арифметической прогрессии, d — ее разность, S_n — сумма ее первых n членов. Тогда $d = a_n - a_{n-1}$, $a_n = a_1 + d(n-1)$, $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$, $a_n = S_n - S_{n-1}$. Если $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

Геометрической прогрессией называется такая последовательность чисел, в которой каждый член, начиная со второго, отличается от предыдущего члена в одно и то же число раз. Это число $q \neq 0$ называется **знаменателем прогрессии**. Если первый член прогрессии больше нуля, то при $0 < q < 1$ геометрическая прогрессия называется **убывающей**, а при $q > 1$ — **возрастающей**. Три числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, если и только если $b^2 = a \cdot c$.

Пусть b_n — n-й член геометрической прогрессии, $q \neq 0$ — ее знаменатель, S_n — сумма ее первых n членов. Тогда $q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ при $q \neq 1$. Если $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

Большинство задач на прогрессии решается общим способом, который основывается на следующем простом, но важ-

ном наблюдении: если для арифметической прогрессии известны ее параметры a_1, d и n (а для геометрической прогрессии — соответственно b_1, q и n), то с помощью приведенных выше формул все остальные параметры этой прогрессии определяются однозначно. Поэтому если всю исходную информацию, приведенную в условии конкретной задачи, в случае арифметической прогрессии выразить через a_1, d и n (или через b_1, q и n — в случае геометрической прогрессии), а затем решить полученную систему уравнений и неравенств, то таким образом можно найти любой требуемый параметр прогрессии.

Задача 10. Между числами 2 и 65 находится 20 чисел, образующих вместе с данными числами арифметическую прогрессию. Найти наибольшее из неизвестных чисел.

Решение. В соответствии с условием задачи $a_1 = 2$, $a_{22} = 65$. Последнее равенство запишем в виде уравнения $a_1 + 21d = 65$. Подставив $a_1 = 2$, получим $21d = 63 \Leftrightarrow d = 3$, откуда $a_{21} = a_{22} - d = 65 - 3 = 62$.

Задача 11. Найти четвертый член геометрической прогрессии, если сумма ее первых n членов выражается формулой $S_n = \dfrac{7\left(4^n - 1\right)}{48}$.

Решение. Поскольку

$$S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = \frac{7\left(4^4 - 1\right)}{48}, \quad S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = \frac{7\left(4^3 - 1\right)}{48},$$

то

$$b_4 = S_4 - S_3 = \frac{7\left(4^4 - 1\right)}{48} - \frac{7\left(4^3 - 1\right)}{48} = \frac{7}{48}\left(4^4 - 1 - 4^3 + 1\right) =$$

$$= \frac{7}{48}\left(4^4 - 4^3\right) = \frac{7}{48} \cdot 4^3\left(4 - 1\right) = \frac{7 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 3}{48} = 28.$$

Иногда ключом к решению задачи является правильно понятая и логически верно истолкованная «нестандартная» информация, содержащаяся в условии задачи.

Задача 12. Первый член арифметической прогрессии равен 130, пятнадцатый член этой прогрессии является ее первым отрицательным членом. Какие значения может принимать разность этой прогрессии?

Решение. Запишем условия этой задачи вначале в виде системы уравнений и неравенств, а затем, как всегда, выразим все неизвестные полученной системы через a_1 и d.

Итак,

$$\begin{cases} a_1 = 130; \\ a_{15} < 0; \\ a_{14} \geq 0. \end{cases}$$

Обычно, записывая условие этой задачи, формально пропускают информацию о том, что a_{15} — не только отрицательный, но и *первый* из отрицательных членов прогрессии!

Вернемся к составленной системе:

$$\begin{cases} a_1 = 130; \\ a_1 + 14d < 0; \\ a_1 + 13d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 130; \\ 130 + 14d < 0; \\ 130 + 13d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 130; \\ d < -\dfrac{130}{14}; \\ d \geq -\dfrac{130}{13} \end{cases} \Leftrightarrow d \in \left[-10; -\frac{65}{7}\right).$$

Задача 13. В ящик вложили 5 ящиков. В каждый из этих ящиков либо опять вложили 5 ящиков, либо не вложили ни одного. Данная процедура повторялась несколько раз. В результате заполненных ящиков оказалось 25. Какой процент составляет количество пустых ящиков от количества заполненных?

Решение. Посмотрим, как меняется число заполненных и число пустых ящиков после каждой процедуры, описанной в условии задачи. При вложении пяти ящиков в пустой ящик общее число пустых ящиков увеличивается на 4 (один пустой ящик заполняется, в то время как добавляется 5 новых), а число запол-

ненных ящиков увеличивается на 1. Таким образом, количества пустых ящиков образуют арифметическую прогрессию с разностью 4, а количества заполненных ящиков — арифметическую прогрессию с разностью 1. Поэтому если процедура будет повторяться n раз, то к завершению процесса число заполненных ящиков будет равно $1+(n-1)\cdot 1=n$, а число пустых ящиков будет равно $5+(n-1)\cdot 4=4n+1$. По условию итоговое число заполненных ящиков равно 25, откуда $n=25$. Число пустых ящиков равно $4n+1=4\cdot 25+1=101$. Искомый процент числа пустых ящиков от числа заполненных равен $\frac{101}{25}\cdot 100=404\%$.

Задача 14. Определить, какой должна быть разность арифметической прогрессии с первым членом $a_1=-27$, чтобы сумма ее первых n членов принимала наименьшее значение при $n=5$.

Решение. Вдумавшись в причину того факта, что суммы S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 членов арифметической прогрессии уменьшались, а затем для $n\geq 6$ стали возрастать, нетрудно догадаться, что члены прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 меньше нуля, а остальные члены уже больше нуля, т. е. a_5 — последний отрицательный член этой прогрессии. Таким образом, S_5 минимальна, если и только если

$$\begin{cases} a_5<0; \\ a_6>0. \end{cases}$$

Отсюда с учетом условия $a_1=-27$ получаем:

$$\begin{cases} -27+4d<0; \\ -27+5d>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d<\frac{27}{4}; \\ d>\frac{27}{5} \end{cases} \Leftrightarrow d\in\left(\frac{27}{5};\frac{27}{4}\right).$$

Иногда исходной информации объективно недостаточно, чтобы определить все параметры прогрессии, но вполне достаточно, чтобы дать ответ на поставленный в задаче вопрос. Для этого нужно выразить искомую величину через парамет-

ры a_1, d и n (или b_1, q и n), а затем воспользоваться условиями задачи.

Задача 15. Чему равно произведение шестого и десятого членов геометрической прогрессии, если произведение пятого, восьмого и одиннадцатого ее членов равно 64?

Решение. По условию

$$b_5 \cdot b_8 \cdot b_{11} = 64 \iff b_1^3 q^{4+7+10} = 64 \iff b_1^3 q^{21} = 64.$$

Выразим теперь искомое произведение $b_6 \cdot b_{10}$ через параметры b_1, q: $b_6 \cdot b_{10} = b_1 q^5 \cdot b_1 q^9 = b_1^2 q^{14} = \left(b_1 q^7\right)^2$. Поскольку $b_1^3 q^{21} = 64 \iff \left(b_1 q^7\right)^3 = 4^3 \iff b_1 q^7 = 4$, то искомое произведение равно $b_6 \cdot b_{10} = 4^2 = 16$.

Задача 16. В арифметической прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n$ известно, что $a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{29} + a_{31} = 784$. Чему равна сумма $a_1 + a_6 + a_{11} + ... + a_{26} + a_{31}$?

Решение. Заметим, что если числа $a_1, a_2, ..., a_n$ составляют арифметическую прогрессию с разностью d, то числа $a_1, a_3, a_5, ..., a_{29}, a_{31}$ составляют арифметическую прогрессию с разностью $2d$, равно как и числа $a_1, a_6, a_{11}, ..., a_{26}, a_{31}$ составляют арифметическую прогрессию с разностью $5d$. Так как $a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{29} + a_{31} = 784$, то

$$\frac{a_1 + a_{31}}{2} \cdot k = 784 \Rightarrow \frac{2a_1 + 30d}{2} \cdot k = 784 \Rightarrow \left(a_1 + 15d\right) \cdot k = 784.$$

Но прогрессия $a_1, a_3, ..., a_{31}$ содержит k членов, где $k = \frac{a_{31} - a_1}{2d} + 1 = \frac{30d}{2d} + 1 = 16$. Итак, $a_1 + 15d = 49$.

А теперь выразим через параметры a_1 и d величину, которую требуется вычислить в условии задачи:

$$a_1 + a_6 + a_{11} + ... + a_{26} + a_{31} = \frac{a_1 + a_{31}}{2} \cdot m = \frac{2a_1 + 30d}{2} \cdot m = \left(a_1 + 15d\right) m.$$

Число членов m в арифметической прогрессии a_1, a_6, a_{11}, ..., a_{26}, a_{31} равно $m = \frac{a_{31} - a_1}{5d} + 1 = \frac{30d}{5d} + 1 = 7$. Вспомним также, что $a_1 + 15d = 49$. Поэтому искомая сумма равна $49 \cdot 7 = 343$.

Особую группу задач составляют задачи на суммирование прогрессий с указанными свойствами. Здесь важно не ошибиться в нахождении последнего члена указанной прогрессии (первый член, как правило, подбирается без всякого труда) и вычислении числа членов этой прогрессии.

Задача 17. Найти сумму всех целых положительных трехзначных чисел, которые при делении на 59 дают остаток 5.

Решение. Очевидно, что возрастающая последовательность указанных чисел образует арифметическую прогрессию с разностью 59. Поскольку любое такое число имеет вид $a = 59k + 5$ (k — натуральные числа), то первым трехзначным числом такого вида будет число $a_1 = 59 \cdot 2 + 5 = 123$. Найдем наибольшее натуральное решение неравенства $59k + 5 < 1000$:

$$59k + 5 < 1000 \quad \Leftrightarrow \quad 59k < 995 \quad \Leftrightarrow \quad k < \frac{995}{59} = 16\frac{51}{59}.$$

Итак, $k = 16$, а значит, $a_n = 59 \cdot 16 + 5$ — последний член исходной прогрессии, число членов которой равно

$$n = \frac{(59 \cdot 16 + 5) - (59 \cdot 2 + 5)}{59} + 1 = \frac{(16 - 2) \cdot 59}{59} + 1 = 15.$$

Найдем теперь искомую сумму всех ее 15 членов:

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{(59 \cdot 2 + 5) + (59 \cdot 16 + 5)}{2} \cdot 15 = \frac{59 \cdot 18 + 5 \cdot 2}{2} \cdot 15 =$$

$$= (59 \cdot 9 + 5) \cdot 15 = 536 \cdot 15 = 8040.$$

Задача 18. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, не делящихся на 11 и имеющих 8 своей последней цифрой.

Решение. Найдем сначала сумму всех трехзначных чисел, оканчивающихся цифрой 8, а затем вычтем из полученного числа

сумму всех таких чисел, кратных 11. Понятно, что последовательные трехзначные числа, оканчивающиеся цифрой 8, образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 108$, разностью $d = 10$ и последним членом $a_n = 998$. Найдем количество, а затем сумму этих чисел:

$$n = \frac{998 - 108}{10} + 1 = 90; \quad S_{90} = \frac{108 + 998}{2} \cdot 90 = 49770.$$

Остается лишь удалить из полученной суммы «лишние» слагаемые — те числа, которые делятся на 11. Для этого заметим, что числа вида $11 \cdot k$ (k — натуральное число) оканчиваются той же цифрой, что и число k. Так как в нашем случае числа оканчиваются цифрой 8, то и k должно оканчиваться этой же цифрой. Найдем трехзначные числа указанного вида: $11 \cdot 8 < 100$, $100 < 11 \cdot 18 < 1000$, ..., $11 \cdot 88 < 1000$, но $11 \cdot 98 > 1000$. Поэтому «лишние» слагаемые будут составлять следующую сумму:

$$11 \cdot 18 + 11 \cdot 28 + 11 \cdot 38 + \ldots + 11 \cdot 88 = 11 \cdot (18 + 28 + \ldots + 88) =$$

$$= 11 \cdot \frac{18 + 88}{2} \cdot 8 = 4664.$$

Итак, искомая сумма равна

$$S_{90} - 4664 = 49770 - 4664 = 45106.$$

В заключение приведем задачи, которые посредством искусных преобразований сводятся к вычислению сумм арифметических или геометрических прогрессий.

Задача 19. Найти сумму $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots + \frac{100}{2^{100}}$.

Решение. Нетрудно проверить, что слагаемые, составляющие заданную сумму, не образуют ни арифметическую, ни геометрическую прогрессию. При этом числители последовательно идущих слагаемых образуют арифметическую прогрессию с разностью 1, а знаменатели — геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Попробуем «сыграть» на указанных особенностях слагаемых искомой суммы и преобразовать ее в прогрессию.

Обозначим $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+...+\frac{100}{2^{100}}$.

Найдем $\frac{S}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+...+\frac{99}{2^{100}}+\frac{100}{2^{101}}$.

Вычислим $S-\frac{S}{2}$ с помощью следующей группировки слагаемых:

$$\frac{S}{2}=S-\frac{S}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{3}{2^3}-\frac{2}{2^3}\right)+...+\left(\frac{100}{2^{100}}-\frac{99}{2^{100}}\right)-\frac{100}{2^{101}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{100}}\right)-\frac{100}{2^{101}}.$$

Первые 100 слагаемых полученной суммы образуют геометрическую прогрессию, для которой первый член $b_1=\frac{1}{2}$, знаменатель $q=\frac{1}{2}$, число членов $n=100$. Находим эту сумму по формуле

$$S_{100}=\frac{b_1\left(1-q^{100}\right)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{100}}.$$

Тогда

$$\frac{S}{2}=S_{100}-\frac{100}{2^{101}} \Leftrightarrow S=2\left(S_{100}-\frac{100}{2^{101}}\right)=2\left(1-\frac{1}{2^{100}}-\frac{100}{2^{101}}\right)=$$

$$=2\left(1-\frac{102}{2^{101}}\right)=2-\frac{102}{2^{100}}.$$

Заметим, что тем же способом можно просуммировать слагаемые в выражении $\frac{m}{n^m}+\frac{m+1}{n^{m+1}}+\frac{m+2}{n^{m+2}}+...+\frac{m+k}{n^{m+k}}$, где m, n, k — натуральные числа, причем n и k больше 1.

Задача 20. Найти число

$$A = 5^2 + 9^2 + 13^2 + ... + 89^2 - 7^2 - 11^2 - 15^2 - ... - 91^2.$$

Решение. Все слагаемые, составляющие сумму и разность в данном выражении, не образуют ни арифметическую, ни геометрическую прогрессии. Перегруппируем слагаемые в исходном выражении следующим образом:

$$A = \left(5^2 - 7^2\right) + \left(9^2 - 11^2\right) + \left(13^2 - 15^2\right) + ... + \left(89^2 - 91^2\right) =$$

$$= (5-7)(5+7) + (9-11)(9+11) + (13-15)(13+15) + ... +$$

$$+ (89-91)(89+91) = -2(5+7+9+11+13+15+...+89+91).$$

В результате этого в скобках появится сумма членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 5$, последним членом $a_n = 91$ и разностью $d = 2$. Число ее членов n равно: $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{91-5}{2} + 1 = 44$. Поэтому искомое число равно

$$A = -2 \cdot \frac{5+91}{2} \cdot 44 = -96 \cdot 44 = -4224.$$

Задача 21. Последовательность чисел 1, 8, 22, 43, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних членов (последующего и предыдущего) образуют арифметическую прогрессию: 7, 14, 21, ... Найти номер члена последовательности, равного 35 351.

Решение. Числа данной последовательности 1, 8, 22, 43, ... обозначим a_1, a_2, a_3, a_4, ... По условию

$$a_2 - a_1 = 7 \cdot 1, \quad a_3 - a_2 = 7 \cdot 2, \quad a_4 - a_3 = 7 \cdot 3, \quad ..., \quad a_n - a_{n-1} = 7(n-1).$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + ... + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) =$$

$$= 7 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + ... + 7 \cdot (n-2) + 7 \cdot (n-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n - a_1 = 7\left(1 + 2 + 3 + ... + (n-1)\right).$$

Так как $1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, то $a_n = a_1 + 7 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$.

По условию $a_n = 35351$, $a_1 = 1$. Поэтому

$$7 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 35350 \quad \Rightarrow \quad n(n-1) = 10100 \quad \Rightarrow \quad n = 101.$$

Не всегда можно свести суммирование к свойствам прогрессии, как, например, в следующей задаче.

Задача 22. Пусть $f(n)$ — целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$. Найти сумму $\frac{1}{f(43)}+\frac{1}{f(44)}+...+\frac{1}{f(1600)}$.

Решение. Обозначим $k=f(n)$. Так как k — ближайшее к $\sqrt{n}$ натуральное число, то

$$\left|\sqrt{n}-k\right|\le\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad k-\frac{1}{2}\le\sqrt{n}\le k+\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad k(k-1)+\frac{1}{4}\le n\le k(k+1)+\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad k(k-1)+1\le n\le k(k+1).$$

Итак, если n удовлетворяет последнему двойному неравенству, то $f(n)=k$. Всего таких n ровно $k(k+1)-k(k-1)=2k$. Поэтому сумма всех чисел $\frac{1}{f(n)}$, где n пробегает все значения от $k(k-1)+1$ до $k(k+1)$, равна $\frac{1}{k}\cdot 2k=2$. Эту сумму обозначим S_k.

Так как $43=7\cdot 6+1$, $1560=39\cdot 40$, то все натуральные числа от 43 до 1560 разбиваются на 33 подмножества вида $\{k(k-1)+1,\ ...,\ k(k+1)\}$, где $k=7,\ 8,\ 9,\ ...,\ 39$, причем

$$\frac{1}{f(k(k-1)+1)}+\frac{1}{f(k(k-1)+2)}+...+\frac{1}{f(k(k+1))}=S_k=2.$$

Поэтому $\frac{1}{f(43)}+\frac{1}{f(44)}+...+\frac{1}{f(1560)}=33\cdot 2=66.$

Рассмотрим остаток суммы:

$$\frac{1}{f(1561)}+\frac{1}{f(1562)}+...+\frac{1}{f(1600)}=\frac{1}{40}+...+\frac{1}{40}=40\cdot\frac{1}{40}=1.$$

В итоге получаем ответ: 67.

Если в задаче требуется найти число элементов каких-либо множеств, которые имеют всевозможные непустые пересечения друг с другом, то применяйте формулу включения-исключения (число элементов в конечном множестве X обозначается $|X|$): для произвольных конечных множеств A и B: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$; для произвольных конечных множеств A, B и C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

При этом следует помнить, что объединение $A \cup B$ множеств A и B состоит из всех тех элементов, которые принадлежат или A, или B, т. е. содержатся хотя бы в одном из множеств A, B; пересечение $A \cap B$ множеств A и B состоит из всех тех элементов, которые принадлежат и A, и B, т. е. содержатся в обоих множествах A, B. Аналогичный смысл имеют объединение и пересечение более чем двух множеств.

Задача 23. Дано конечное подмножество X множества натуральных чисел, каждый элемент множества X есть число, кратное или 2, или 3, или 5. Найти число элементов в множестве X, если среди них имеются: 70 чисел, кратных 2; 60 чисел, кратных 3; 80 чисел, кратных 5; 32 числа, кратных 6; 35 чисел, кратных 10; 38 чисел, кратных 15; 20 чисел, кратных 30.

Решение. Пусть A — множество всех тех чисел из X, которые кратны 2, B — множество всех тех чисел из X, которые кратны 3, C — множество всех тех чисел из X, которые кратны 5. Тогда $X = A \cup B \cup C$, причем согласно условию, $|A| = 70$, $|B| = 60$, $|C| = 80$, $|A \cap B| = 32$, $|A \cap C| = 35$, $|B \cap C| = 38$, $|A \cap B \cap C| = 20$.

По формуле включения-исключения получаем:

$$|X| = |A \cup B \cup C| =$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 70 + 60 + 80 - 32 - 35 - 38 + 20 = 125.$$

§ 1.2. Преобразования графиков

При решении ряда задач, в которых требуется определить множество значений, промежутки монотонности, точки экстремума некоторой функции, использование производной может оказаться весьма затруднительным или даже невозможным. В подобных случаях прибегают к построению эскиза графика, иллюстрирующего поведение заданной функции, с помощью которого и определяют ее необходимые характеристики. Как мы увидим в последующих главах, эффективно применяются графики и в решениях уравнений и неравенств.

Для успешного построения эскиза графика необходимо знать:

- графики основных элементарных функций;
- простейшие преобразования графиков — преобразования симметрии, параллельного переноса, деформации, а также преобразования графиков функций, содержащих модули.

Преобразование симметрии

1. Симметрия относительно оси Oy: $f(x) \to f(-x)$.

   График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy (рис. 1.1).

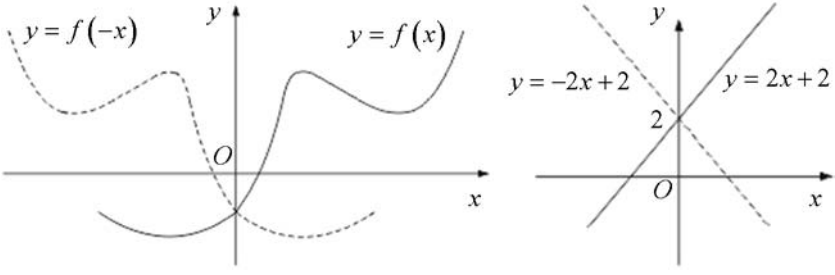


Рис. 1.1

2. Симметрия относительно оси Ox: $f(x) \to -f(x)$.

   График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox (рис. 1.2).

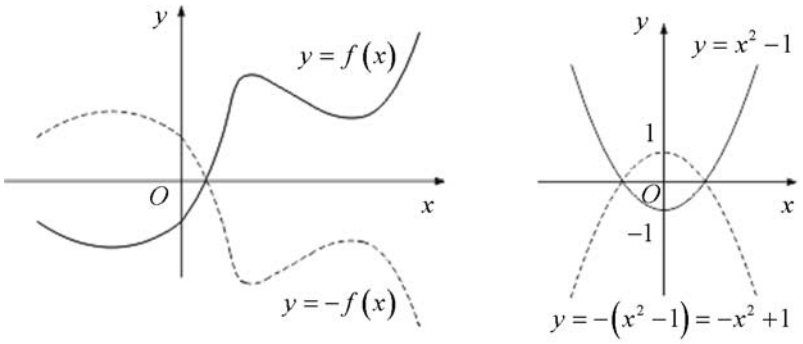


Рис. 1.2

Параллельный перенос

1. Параллельный перенос вдоль оси Oy: $f(x) \to f(x) + a$.

   График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Oy на a единиц вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$ (рис. 1.3).

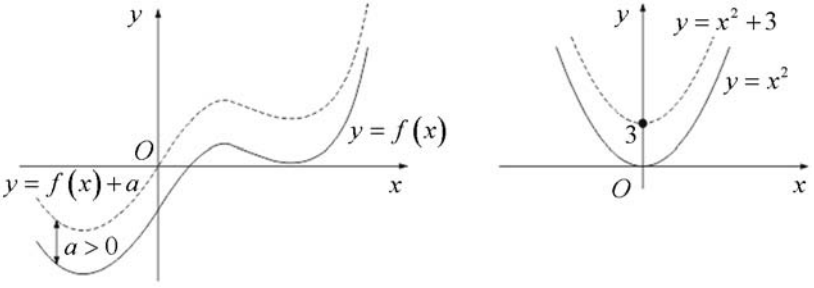


Рис. 1.3

2. Параллельный перенос вдоль оси Ox: $f(x) \to f(x-a)$.

   График функции $y = f(x-a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Ox на a единиц вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$ (рис. 1.4).

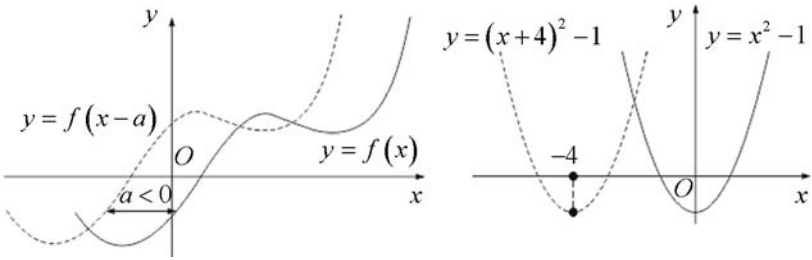


Рис. 1.4

Преобразования растяжения (сжатия)

1. Растяжение (сжатие) вдоль оси Oy: $f(x) \to a \cdot f(x)$, $a > 0$.

   Пусть $a > 1$. График функции $y = a \cdot f(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ в a раз вдоль оси Oy (рис. 1.5).

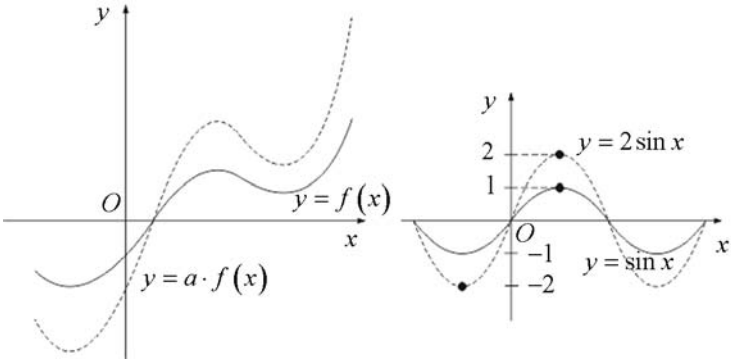


Рис. 1.5

Пусть $0 < a < 1$. График функции $y = a \cdot f(x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{a}$ раз вдоль оси Oy (рис. 1.6).

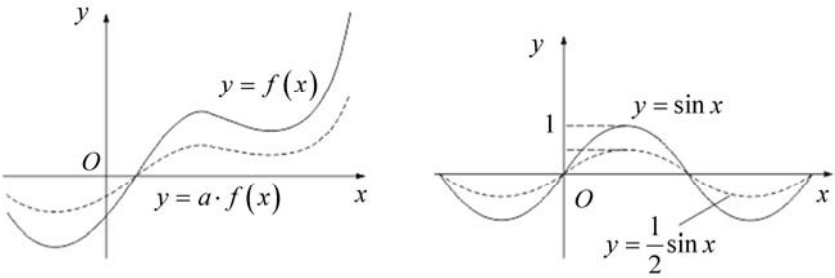


Рис. 1.6

2. Растяжение (сжатие) вдоль оси Ox: $f(x) \to f(ax)$, $a > 0$.

Пусть $a > 1$. График функции $y = f(ax)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ в a раз вдоль оси Ox (рис. 1.7).

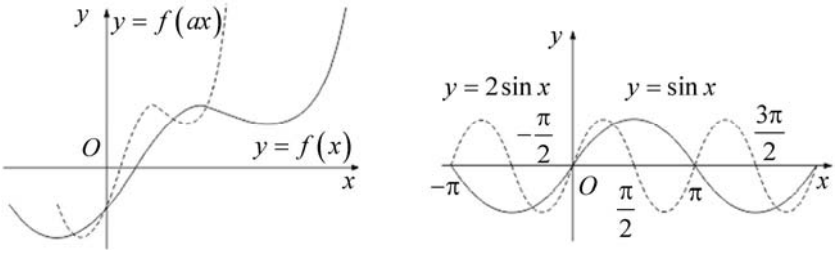


Рис. 1.7

Пусть $0 < a < 1$. График функции $y = f(ax)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{a}$ раз вдоль оси Ox (рис. 1.8).

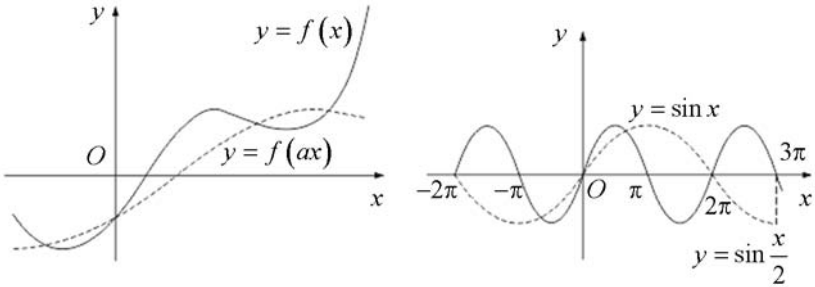


Рис. 1.8

Два основных приема преобразования графиков, содержащих модули

1. $f(x) \to |f(x)|$.

   График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом (см. рис. 1.9 — пунктиром обозначен график функции $y = f(x)$): та часть графика $y = f(x)$, которая расположена не ниже оси Ox (в верхней полу-

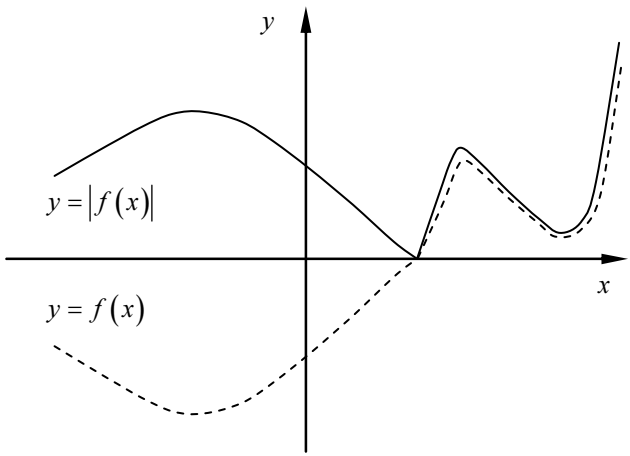


Рис. 1.9

плоскости), остается без изменения; часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости, симметрично отображается (вверх) относительно оси Ox.

Например, см. рис. 1.10.

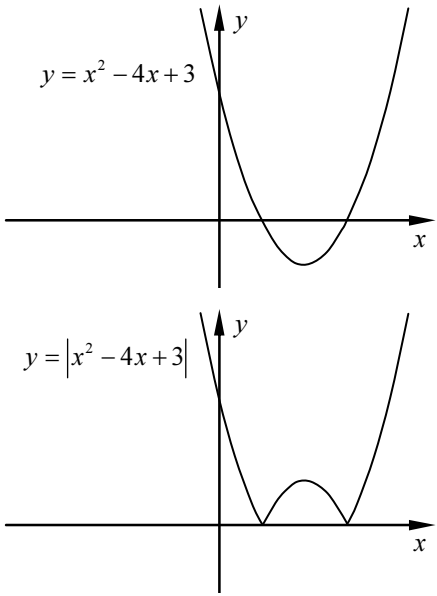


Рис. 1.10

2. $f(x) \to f(|x|)$.

График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом (см. рис. 1.11 — пунктиром обозначен график функции $y = f(x)$): та часть графика $y = f(x)$, которая расположена правее оси Oy (в правой полуплоскости), остается без изменения; та часть графика, которая расположена левее оси Oy, заменяется симметричным отображением относительно оси Oy той части графика $y = f(x)$, которая находится в правой полуплоскости.

Пример приведен на рис. 1.12.

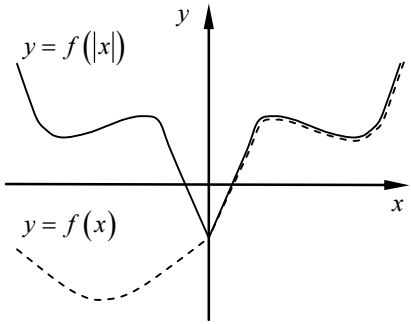


Рис. 1.11

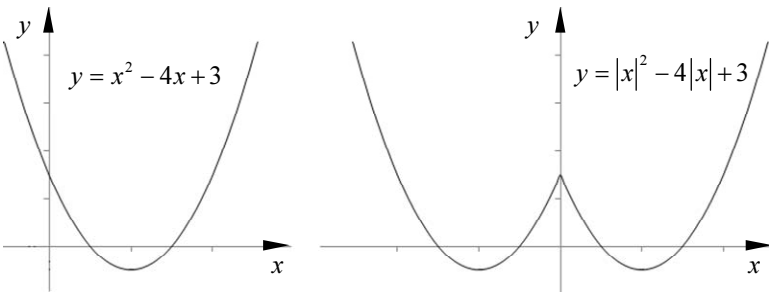


Рис. 1.12

Задача 1. Каким должно быть значение y_0, чтобы прямая $y = y_0$ пересекала график функции $y = \left|x^2 - 3|x| + 2\right|$ наибольшее число раз? Определить это максимальное число пересечений.

Решение. Построим график функции $y = \left|x^2 - 3|x| + 2\right|$. Найдем координаты вершины вспомогательной параболы $y_1 = x^2 - 3x + 2$ (это $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = -\frac{1}{4}$), абсциссы точек ее пересечения с осью Ox (это $x_1 = 1$, $x_2 = 2$) и ординату ее точки пересечения с осью Oy (это $y(0) = 2$). Используя найденные значения, построим график параболы $y_1 = x^2 - 3x + 2$, затем — график функции $y_2 = \left|x^2 - 3x + 2\right|$ и, наконец, искомый график $y = \left||x|^2 - 3|x| + 2\right|$ для $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 1.13).

Поскольку уравнением $y = y_0$ определяется множество всех прямых, параллельных оси Ox, то при $y_0 \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$ эти прямые пересекают данный график наибольшее число раз. Это число равно 8.

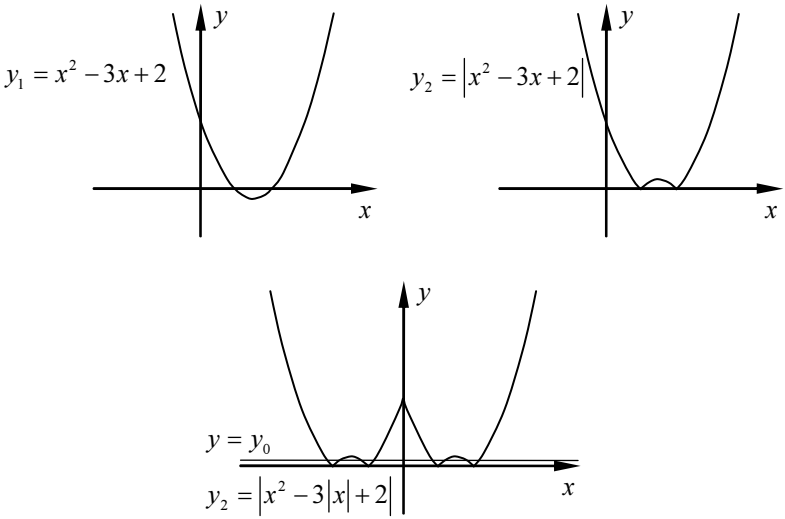


Рис. 1.13

Общий алгоритм построения эскиза графика функции $y = cf(ax - b) + d$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.

1. Записать функцию в виде $y = cf\left(a\left(x - \frac{b}{a}\right)\right) + d$.

2. Построить эскиз графика $y_1 = f(x)$.

3. Построить эскиз графика $y_2 = f(|a|x)$ деформацией y_1 вдоль оси Ox: сжатием в $|a|$ раз при $|a| > 1$ или растяжением в $\frac{1}{|a|}$ раз при $|a| < 1$.

4. Если $a<0$, то построить эскиз графика $y_3=f(ax)=f(-|a|x)$ симметричным отображением y_2 относительно оси Oy. Если $a>0$, то положить $y_3=y_2$.

5. Построить эскиз графика $y_4=|c|f(ax)$ деформацией y_3 вдоль оси Oy: растяжением в $|c|$ раз при $|c|>1$ или сжатием в $\frac{1}{|c|}$ раз при $|c|<1$.

6. Если $c<0$, то построить эскиз графика $y_5=cf(ax)=-|c|f(ax)$ симметричным отображением y_4 относительно оси Ox. Если $c>0$, то положить $y_5=y_4$.

7. Построить эскиз графика $y_6=cf(ax)+d$ параллельным переносом y_5 вдоль оси Oy: на d единиц вверх при $d>0$ или на d единиц вниз при $d<0$.

8. Построить эскиз графика $y_7=cf\left(a\left(x-\frac{b}{a}\right)\right)+d$ параллельным переносом y_6 вдоль оси Ox: на $\frac{b}{a}$ единиц вправо при $\frac{b}{a}>0$ или на $\frac{b}{a}$ единиц влево при $\frac{b}{a}<0$.

Задача 2. На рис. 1.14 изображен график функции $y=f(x)$. Построить график функции $y=-2f\left(1-\frac{x}{2}\right)+5$.

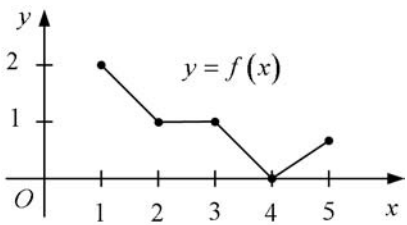


Рис. 1.14

Решение. Запишем искомую функцию в виде $y=-2\cdot f\left(-\frac{1}{2}(x-2)\right)+5$. Построим последовательно графики $y_1=f\left(\frac{1}{2}x\right)$, $y_2=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$, $y_3=2\cdot f\left(-\frac{1}{2}x\right)$, $y_4=-2\cdot f\left(-\frac{1}{2}x\right)$, $y_5=-2\cdot f\left(-\frac{1}{2}x\right)+5$, $y_6=-2\cdot f\left(-\frac{1}{2}(x-2)\right)+5$.

Итак, y_1 получается растяжением графика $y=f(x)$ вдоль оси Ox в 2 раза; y_2 — симметричным отображением y_1 относительно оси Oy (рис. 1.15).

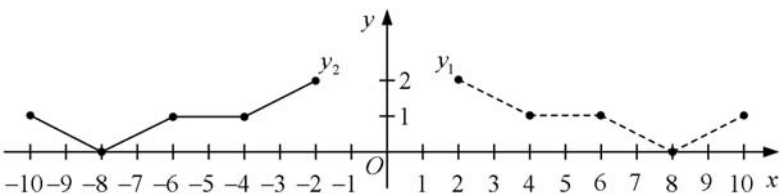


Рис. 1.15

Далее y_3 получается из y_2 растяжением в 2 раза вдоль оси Oy; y_4 — симметричным отображением y_3 относительно оси Ox (рис. 1.16).

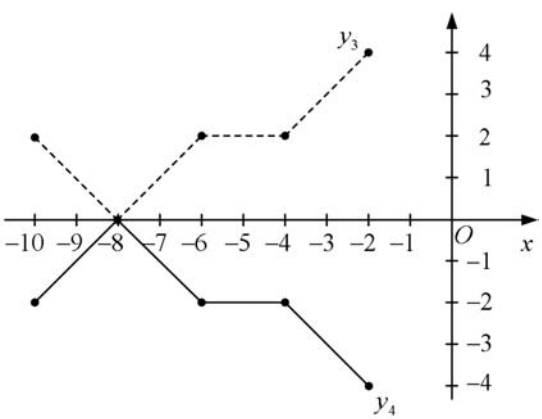


Рис. 1.16

И, наконец, y_5 получается параллельным переносом y_4 на 5 единиц вверх; y_6 — параллельным переносом y_5 на 2 единицы вправо (рис. 1.17).

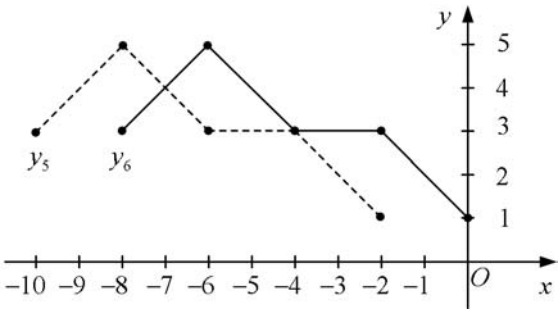


Рис. 1.17

Задача 3. Найти область определения и область значений функции $y=\dfrac{30x-25x^2-9}{5x-3}$.

Решение. Так как $5x-3\neq 0$, то $D(y)=(-\infty;\,0{,}6)\cup(0{,}6;\,+\infty)$.

Далее: $\dfrac{30x-25x^2-9}{5x-3}=-\dfrac{(5x-3)^2}{5x-3}=-(5x-3)=3-5x$, т. е. для всех x из $D(y)$ $y=3-5x$. График этой функции — прямая. Так как $x=0{,}6$ не входит в область определения функции, то точка с координатами $(0{,}6;\ 0)$ не принадлежит графику функции. Значит, множество значений функции — все числа, кроме 0: $E(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$.

Задача 4. Задать формулой функцию, графиком которой является отрезок MK, изображенный на рис. 1.18.

Решение. Прямая MK является графиком линейной функции $y=kx+b$. По изображению отрезка видно, что прямая MK проходит через точки $(-2;\,1)$ и $(0;\,2)$. Значит, $1=k\cdot(-2)+b$ и

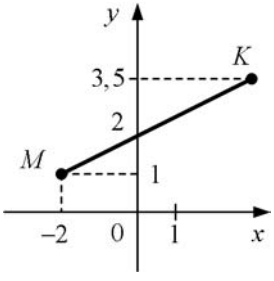


Рис. 1.18